

國立嘉義高級中學107學年度科學班甄選入學科學能力檢定—數學成就測驗試題

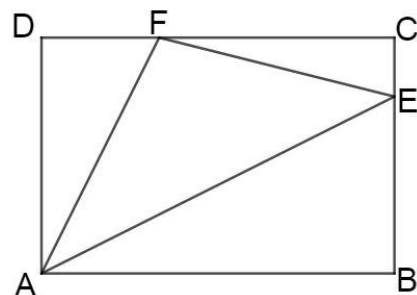
◎填充題：每題 5 分，共 100 分，每題答案須全對才給分，附圖僅供參考。

1. 已知 $\begin{cases} |2x-2| + |y+5| = 3 \\ |2x-5| - 2y = 13 \end{cases}$ ，求 $(x, y) =$ _____。
2. 已知 $x + y = 3$ ， $xy = -2$ ，求 $x^4 + x^3 + x^2 + x + y^4 + y^3 + y^2 + y =$ _____。
3. 已知 n 為正整數，且 $n^2 + 10n + 3$ 為兩個連續正整數之乘積，求 n 的最大值為_____。
4. 已知 x, y 為實數，若 $x^2 + 2y^2 = 1$ ，則 $6x + 11y^2$ 的最大值為 M 且最小值為 m ，求 $M + m =$ _____。
5. 設 $f(n)$ 表示 $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ 的個位數字。例如： $1 + 2 + 3 + \cdots + 9 = 45$ ，則 $f(9) = 5$ 。
求 $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(2018) =$ _____。
6. 將 1 連續寫到 2018，所得的數為 $a = 123456789101112 \cdots 20172018$ ，求 $a \div 180$ 的餘數為_____。
7. 甲乙兩人在操場上跑步，兩人同時從同一點順時針出發，甲的速度是乙的速度的 k 倍，甲乙皆為等速度且 $k > 1$ 。當甲第一次從背後追上乙，甲立即轉身且以原速度逆時針跑，當兩人再次相遇，乙恰好總共跑了三圈。求 $k =$ _____。
8. 擲一個公正骰子三次，所擲出的點數依序為 a, b, c ，則使得函數
$$f(x) = a \cdot \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} + b \cdot \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} + c \cdot \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)}$$
的圖形為一直線，此時數對 (a, b, c) 有_____種情況。
9. 若 $\sqrt{2015 \times 2016 \times 2017 \times 2018 + 1} = A + 2018^2$ ，則 $A =$ _____。
10. 已知 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ，且 $f(2) = \frac{1}{2}$ ， $f(3) = \frac{1}{3}$ ， $f(4) = \frac{1}{4}$ ，求 $f(11) =$ _____。

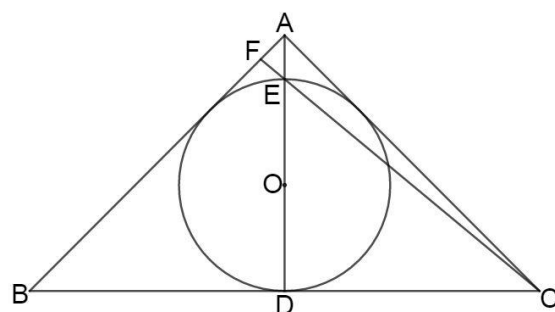
11. $[x]$ 表示等於或小於 x 的最大整數 (例如： $[3.9] = 3$ ， $[6] = 6$)。

若正實數 x 不為整數且滿足 $x + \frac{107}{x} = [x] + \frac{107}{[x]}$ ，則 $x =$ _____。

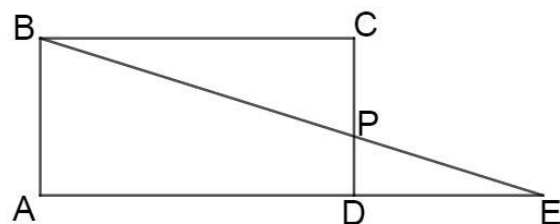
12. 如右圖，點 E 、 F 分別為長方形 $ABCD$ 邊 \overline{BC} 、 \overline{CD} 上的點，已知 $\triangle ABE$ 的面積為 24， $\triangle ECF$ 的面積為 6， $\triangle FDA$ 的面積為 8，求矩形 $ABCD$ 的面積為_____。



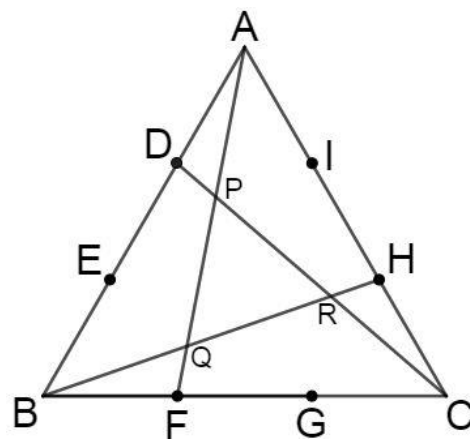
13. 如右圖，已知等腰 $\triangle ABC$ 中 $\overline{AB} = \overline{AC}$ ，圓 O 為 $\triangle ABC$ 的內切圓， \overline{AD} 為 \overline{BC} 邊上的高，點 E 為 \overline{AD} 與圓 O 在 $\triangle ABC$ 內部的交點。延長 \overline{CE} 交 \overline{AB} 於點 F ，若 \overline{CF} 與 \overline{AB} 垂直，且圓 O 的半徑為 1，則 $\overline{AD} =$ _____。



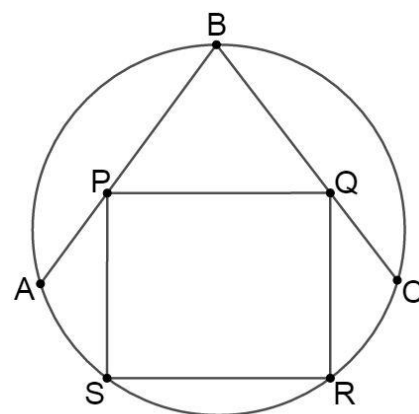
14. 如右圖，長方形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} = 1$ ， $\overline{AD} = 2$ ， P 為在 \overline{CD} 上的動點，連接 \overline{BP} 並將其延長，交 \overline{AD} 於 E ，欲使 $\triangle PDE$ 與 $\triangle CBP$ 兩者面積和最小，此時 $\overline{CP} =$ _____。



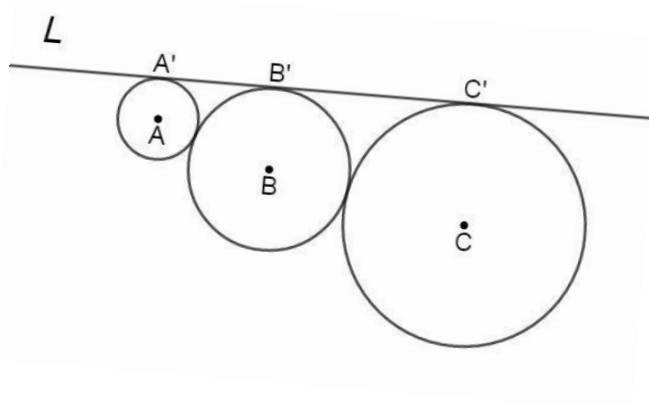
15. 如右圖， $\triangle ABC$ 為正三角形， D 、 E 、 F 、 G 、 H 、 I 分別為 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{AC} 邊上的三等分點，連 \overline{AF} 、 \overline{BH} 、 \overline{CD} 得一個三角形 $\triangle PQR$ 。已知 $\triangle PQR$ 的面積 $= 1$ ，求 $\triangle ABC$ 的面積為_____。



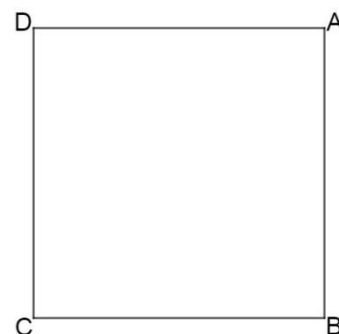
16. 如右圖，半徑為 5 的圓內有兩弦 \overline{BA} 與 \overline{BC} ，兩弦長度皆為 8。
設點 P 在 \overline{BA} 上，點 Q 在 \overline{BC} 上，點 R 、 S 在圓上，且 $PQRS$
為正方形，求此正方形邊長為 _____。



17. 如右圖，分別以 A 、 B 、 C 為圓心，1、2、3 為半徑的三個圓都在直線 L 的同側，分別與直線 L 切於 A' 、 B' 、 C' ，且點 B' 在點 A' 與 C' 之間，若圓 B 分別與圓 A 和圓 C 外切，則 $\triangle ABC$ 的面積為 _____。



18. 如右圖，正方形 $ABCD$ 的邊長為 1，連 \overline{BD} 。
(1) 令 Q_1 為 \overline{CD} 的中點，且 P_1 為 $\overline{AQ_1}$ 與 \overline{BD} 的交點。此時得 $\triangle DQ_1P_1$ 。
(2) 令 Q_2 為過 P_1 垂直於 \overline{CD} 的垂足， P_2 為 $\overline{AQ_2}$ 與 \overline{BD} 的交點。此時得 $\triangle DQ_2P_2$ 。
(3) 令 Q_3 為過 P_2 垂直於 \overline{CD} 的垂足， P_3 為 $\overline{AQ_3}$ 與 \overline{BD} 的交點。此時得 $\triangle DQ_3P_3$ 。
請以步驟 (2)、(3) 的規則繼續類推下去。
假設 $f(i)$ 表示 $\triangle DQ_iP_i$ 的面積，
則 $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(20) =$ _____。



19. 已知 $P = \sqrt{(x-1)^2 + (x^2-10)^2} + \sqrt{(x-7)^2 + (x^2-2)^2}$ ，求 P 的最小值為 _____。

20. 設 $f(x) = x^2 + ax + b$ ，若 $f(f(x)) = f(x)$ 的解為 $x = -3$ 或 -2 或 4 或 5 ，則數對 $(a, b) =$ _____。