

106 學年度國立嘉義高中數學日競賽高三組團體賽試題

請將答案填寫在答案卷上。

1. 若 a, b, c 是複數且滿足 $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a}$ ，求 $\frac{a+b+c}{a+b-c} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(兩解)

2. 若 a, b, c, d, e 分別是 $1 \sim 9$ 中五個相異的正整數，且滿足右式 $\begin{array}{r} a \quad b \quad c \quad d \quad e \\ \times \hspace{1.5cm} 4 \\ \hline e \quad d \quad c \quad b \quad a \end{array}$
則數對 $(a, b, c, d, e) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

3. 已知 $f(x)$ 是首項係數為 1 的 107 次實係數多項式，若 $f(x) = 0$ 的所有根之和為 2018，求 $f(x^2 - 2x + 3) = 0$ 的所有根之和為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

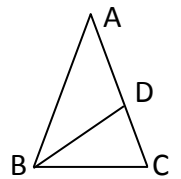
4. 方程式 $2^x = (\sqrt{2})^5 \cdot x$ 在 n 與 $n+1$ 之間有一實根，求正整數 $n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

5. 若 a, b 是正實數，且 $\log_8 a + \log_4 b = 3$ ， $\log_8 b + \log_4 a = 7$ ，求 $a \cdot b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

6. 現有一個 10 階的樓梯，每次上樓時可以上 1、2 或 3 階，求上樓的方法數總共有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 種。

7. 某旅館共有 20 間雙人房，其中 10 間住了一男一女，另 10 間住了兩女生。若服務生隨機敲其中一門，聽到房內傳來女聲對同伴說：「我現在沒空，麻煩你(妳)去開門好嗎？」請問來開門的人是女生的機率是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

8. 如右圖， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ， $\overline{AD} = \overline{BD} = \overline{BC}$ ，試利用此圖求 $\cos 36^\circ = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



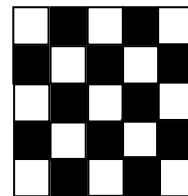
9. 若 $x^3 - 3x^2 + 5x + 2 = 0$ 的三根為 α, β, γ ，求 $\frac{1}{2-\alpha} + \frac{1}{2-\beta} + \frac{1}{2-\gamma} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

10. 已知 $\frac{3^{100}}{2^{50}}$ 是一個有限小數，若其整數部分有 m 位，小數部分有 n 位，求 $m+n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
(已知 $\log 2 = 0.3010$ ， $\log 3 = 0.4771$)

11. 若 $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ ，對所有 $n \geq 3$ ，且已知 $\sum_{n=1}^{20} a_n = 50$ ， $\sum_{n=1}^{40} a_n = 37$ ，試求 $\sum_{n=1}^{107} a_n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

12. 給定平面上兩向量 $\vec{a} = (1, 1)$ ， $\vec{b} = (1, -2)$ ，今從 $(0, 0)$ 出發，每次前進時只能從 \vec{a}, \vec{b} 中擇一，且不能走到 x 軸下方(可剛好在 x 軸上)，試問走到 $(9, 0)$ 的方法數有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 種。

13. 右圖是一黑白相間的 5×5 棋盤，求任取兩格不在同一行、列，且恰一黑一白的機率是_____。



14. 若點 $P(a,b)$ 是圓 $x^2 + y^2 = 4$ 上的動點，點 $Q(c,d)$ 是圓 $(x+3)^2 + (y+4)^2 = 1$ 上的動點，求行列式 $\begin{vmatrix} a & d+4 \\ b & c+3 \end{vmatrix}$ 的最大值是_____。

15. 已知 A, P, Q, R 皆為二階可逆方陣，且 $A = PQR$ ， $RP = Q = \begin{pmatrix} \cos 10^\circ & -\sin 10^\circ \\ \sin 10^\circ & \cos 10^\circ \end{pmatrix}$ ，若 n 是大於1的正整數使得 $A^n = A$ ，求 n 的最小值是_____。

16. 在坐標平面上，已知 $P(-3,0)$ ，且 A 是正 x 軸(含原點)上的動點， B 是 y 軸上的動點滿足 $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$ (向量內積為0)，若 C 在直線 \overline{AB} 上使得 $2\overrightarrow{BC} + 3\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0}$ ，求 C 點的軌跡方程式為_____。

17. 右表是兩組數據 $X = \{x_n \mid n = 1 \sim 10\}$ ，

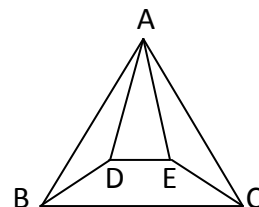
$$Y = \{y_n \mid n = 1 \sim 10\} \text{，已知 } \sum_{n=1}^{10} x_n = 195 \text{，}$$

$$\sum_{n=1}^{10} y_n = 285 \text{，試求 } Y \text{ 對 } X \text{ 的回歸直線為_____。}$$

X	17	17	18	19	19	20	20	21	21	23
Y	22	24	23	26	30	30	33	31	32	34

18. 如右圖，在正 $\triangle ABC$ 中，已知 $\overline{AD} = \overline{AE} = 2\sqrt{7}$ ， $\overline{DE} = 2$ ，

$$\overline{DB} = \overline{EC} = 4 \text{，求正 } \triangle ABC \text{ 的邊長是_____。}$$



19. 若空間中三向量 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ， $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ， $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ 滿足

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & \alpha & 10 \\ \alpha & 9 & \beta \\ 10 & \beta & 25 \end{pmatrix} \text{，且 } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ 張出的平行六面體體積為 } 20\sqrt{3} \text{，求}$$

$$(\vec{a} + \vec{c}) \cdot \vec{b} \text{ 的最大值是_____。}$$

20. 已知圓 $C: x^2 + y^2 = 25$ 上有兩點 $A(3,4)$ 、 $B(-5,0)$ ，若拋物線 Γ 同時切圓 C 於 A, B 兩點，求 Γ 的焦點坐標是_____。

(已知：與拋物線對稱軸平行的光線入射至拋物線形成的鏡面反射後的光線會通過焦點。)