

106 學年度國立嘉義高中數學日競賽高二組團體賽試題

請將答案填寫在答案卷上。

1. 數字相異且由千位至個位數「依次遞增」或「依次遞減」的四位數，例如：2368、1479 為遞增，8632、9741 為遞減。則這樣的四位數有_____個。

2. 解聯立方程式
$$\begin{cases} 7\log x - 5 \cdot 3^y = -1 \\ \log x^6 + 3^{y+1} = 21 \end{cases}$$
，數對 $(x, y) =$ _____

3. 求 x 的範圍，使 $f(x) = \log_{35} \left[\log_{\frac{1}{81}} (\log_4 x) \right]$ 有意義。

4. $\log_3 x = 28$ ， $\log_3 y = 12$ ，則 $\log_{xy} \left(\frac{x}{y} \right) =$ _____

5. 設 α, β 為方程式 $3x^2 - 5x + 2 = 0$ 的兩根，則 $(3\alpha^3 - 5\alpha^2 + 4\alpha + 1)(3\beta^3 - 5\beta^2 + 4\beta + 1) =$ _____

6. $\frac{3}{1^2} + \frac{5}{1^2 + 2^2} + \frac{7}{1^2 + 2^2 + 3^2} + \cdots + \frac{2n+1}{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2} =$ _____

7. 某公司的產品由甲、乙、丙三家工廠所製造，產量分別各占 60%，30%，10%。各工廠不合格的產品各占 5%，3%，2%，今從產品中任取一個檢查，結果是不合格，問它來自甲廠出品之機率為_____

8. 已知方程式 $x^3 - 19x + a = 0$ 的三根都是整數，則 $a =$ _____。(兩解)

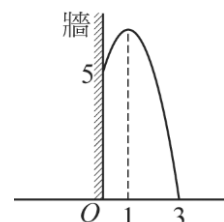
9. 設 k 為實數且 $y = x^2 + kx + k$ 的圖形與直線 $y = x + 1$ 沒有交點，則 k 的範圍為_____

10. 設 $\sqrt{49 - \sqrt{720}}$ 的小數部分為 x ，化簡 $\frac{\sqrt{x+6+\sqrt{x^2+12x}}}{\sqrt{x+6-\sqrt{x^2+12x}}}$ 之值為_____。

11. 雄女舉辦校內數學能力競賽，共 10 位同學入決賽，此 10 位同學成績的算術平均 $\mu = 50$ ，標準差 $\sigma = 20$ ，今發現某生成績應為 60 分誤登記為 40 分，更正後之標準差若為 \sqrt{k} 分，則 $k =$ _____

12. 有甲、乙兩袋，甲袋裝有銀幣 6 個與金幣 1 個，乙袋裝有銀幣 4 個。今由甲袋取出 4 個錢幣置入乙袋，再由乙袋取出 4 個錢幣置入甲袋，求金幣在乙袋的機率 _____

13. 在一棟建築物裡，從 5 公尺高的窗口，用水管斜著向外噴水，噴出的水在垂直於牆壁的平面上，畫出一條拋物線如圖所示；其頂點距離牆 1 公尺，並在離牆 3 公尺處落到地面，則水柱之最高點高度比發射點高度高出 _____ 公尺？



14. 設 $f(x) = x|2-x| - 2|2+x|$ ，若實數 x 滿足 $-4 \leq x \leq 3$ ， $f(x)$ 之最大值為 α ， $f(x)$ 之最小值為 β ，則數對 $(\alpha, \beta) =$ _____

15. 一數列滿足 $a_1 = 1$ ， $a_{n+1} = \frac{3a_n}{a_n + 3}$ ， $n \geq 1$ ，則 $a_{100} =$ _____

16. 以圍棋之棋子排成上下二列，各列 10 個，上為 2 白 8 黑，下為 7 黑 3 白，若上下白子不許相對，排法共有 _____ 種

17. 設 $f(x)$ 是領導係數為 1 的實係數三次多項式，若 $f(x)$ 分別除以 $x^2 + x - 2$ 和 $x^2 - x - 6$ 的餘式都是 $3x - 9$ 。已知 $f(k) < 0$ ，則 k 的範圍為 _____

18. $C_0^{100} - C_2^{100} + C_4^{100} - C_6^{100} + \dots + C_{96}^{100} - C_{98}^{100} + C_{100}^{100} =$ _____ (答案不用乘開)

19. 今有大小相同的球 6 顆，3 顆紅色，2 顆藍色，1 顆黃色，今將 6 球分給三個人，每人各得 2 顆，則有 _____ 種不同的分法？

20. 解方程式 $(x - 2^{\frac{1}{2}})(x - 3^{\frac{1}{3}})(x - 5^{\frac{1}{5}}) = \left| (x - 2^{\frac{1}{2}})(x - 3^{\frac{1}{3}})(x - 5^{\frac{1}{5}}) \right|$ 。