

張進通許世賢文教基金會 109 學年度雲嘉南區國中數學能力競賽

數學一試題

一、填充題：每格 5 分，共 90 分。

1. 已知 $a+b=7$ 且 $a^2+b^2=39$ ，則 $a^4+b^4=$ _____。

2. 已知 a 、 b 、 c 都是正整數，且 $a>b>c$ 。若 $(a-c)(b-c)c=17$ ，試求： $a+b+c=$ _____。

3. 在空格中填入數字 1 到 4，使每個直行、橫列及粗線區域的數字都不能重複。試依照上述規則找出右側表格中 a 、 b 、 c 、 d 所代表的數字，試求 $a+b+c-d$ 的值 = _____。

舉例如下：

每個直行的空格中，填入數字 1 到 4，且數字不能重複。

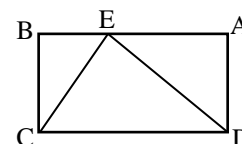
3	4	2	1
1	2	4	3
2	1	3	4
4	3	1	2

每個橫列的空格中，填入數字 1 到 4，且數字不能重複。

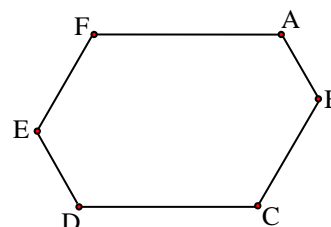
每個粗線區域的空格中，填入數字 1 到 4，且數字不能重複。

	1	b	
a			2
		3	
4	c		d

4. 如右圖所示，E 點為長方形 ABCD 的 \overline{AB} 上一點，若 $\overline{BC}=12$ 、 $\overline{BE}=9$ ，且 $\angle CED=90^\circ$ ，則長方形 ABCD 的面積 = _____。

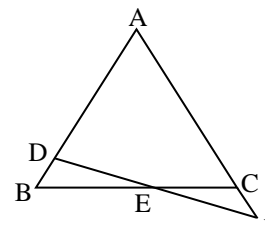


5. 如右圖所示， $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=\angle E=\angle F=120^\circ$ ，且 $\overline{AB}=2$ 、 $\overline{BC}=5$ 、 $\overline{CD}=3$ ，求 $\overline{DE}+\overline{EF}$ 的值 = _____。



6. 若不為零的實數 a 滿足 $\frac{a}{a^2+a+1}=\frac{12}{37}$ ，試計算 $\frac{a^2}{a^4+a^2+1}$ 的值 = _____。

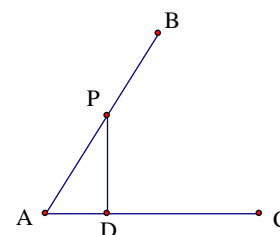
7. 如右圖所示， $\overline{AB}=\overline{AC}$ ，D 點在 \overline{AB} 上，F 點在 \overline{AC} 的延長線上， \overline{DF} 交 \overline{BC} 於 E 點，且 $\overline{DE}=\overline{EF}$ ，若 $\overline{AC}=5$ 、 $\overline{CF}=1$ ，求比值 $\frac{\overline{BE}}{\overline{CE}}=$ _____。



8. 已知 $\triangle OAB$ 的三個頂點為 $O(0,0)$ 、 $A(14,0)$ 、 $B(5,12)$ ，求 $\triangle OAB$ 的內切圓半徑為_____。

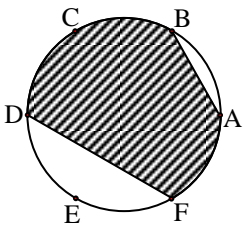
9. 已知五邊形 OABCD 的五個頂點為 $O(0,0)$ 、 $A(1,0)$ 、 $B(b,2)$ 、 $C(c,4)$ 、 $D(d,3)$ ，且 $d<0<c<1<b$ 。若 E、F 分別是 \overline{BC} 、 \overline{CD} 的中點，G 是 \overline{EF} 的中點，求 $\triangle OAG$ 的面積為_____。

10. 如右圖， $\angle BAC=60^\circ$ ， $\overline{AB}=12$ ，若 P 點在 \overline{AB} 上， $\overline{PD}\perp\overline{AC}$ 於 D 點，且 $\overline{PB}=\overline{PD}$ ，求 $\overline{PB}=$ _____。



11.投擲一顆公正骰子 2 次，第一次得 b 點；第二次得 c 點，求方程式 $x^2+bx+c=0$ 的兩根都是整數的機率為_____。

12.如右圖所示，A、B、C、D、E、F 六點等分圓周，若這個圓的半徑是 6，求斜線部分的面積=_____。



13.設 a、b 都是正整數，若 $b^2=4a$ 且 $a+3b>280$ ，求 a 的最小值是_____。

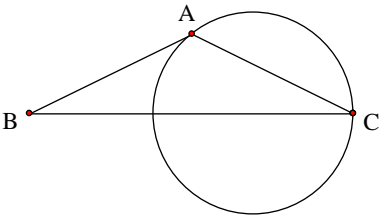
14.設 a、b 都是大於 100 的質數，若 $a-b=2$ ，求 a^2+b^2 除以 8 的餘數=_____。

15.已知當時鐘走到 6 點 x 分的時候，時針與分針重合，求 x=_____。

16.將一個正整數 n 平方後，它會在尾巴重新出現(但 0、1 不算)，則稱 n 為「自守數」。一位「自守數」只有 5、6；二位「自守數」只有 25、76，試求：最小的三位「自守數」為_____。
【說明： $5^2=25$ 、 $6^2=36$ 、 $25^2=625$ 、 $76^2=5776$ 。】

17.一筆統計資料有 11 個正整數數據如下：
7、5、4、2、x、8、11、4、6、y、5，
已知這筆統計資料的平均數與中位數都是 6，求絕對值 $|x-y|$ =_____。

18.如右圖，圓的半徑是 2， $\angle C=30^\circ$ 、若 A、C 在圓上， \overline{AB} 切圓於 A 點，且 \overline{BC} 通過圓心，求 $\triangle ABC$ 的面積=_____。



二、作圖與證明 (每題 5 分，共 10 分。)

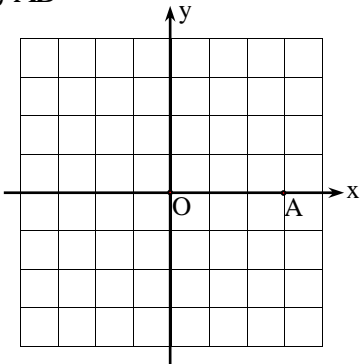
1. 平面上一直線 L 及線外一點 A，若 \overline{AB} 垂直 L 線於 B 點，則稱 A 點到直線 L 的距離為 \overline{AB} 。
【本題為尺規作圖，請留下作圖過程痕跡，並寫出作圖步驟，不必證明。】

【已知】如右圖，O 為原點、A 點坐標為 (3,0)，小方格邊長=1。

【求作】滿足下列兩個條件的直線 L：

- (1) O 點到直線 L 的距離=1，且 A 點到直線 L 的距離=2。
- (2) O、A 兩點都在直線 L 的同側。

【註：符合條件的直線有兩條，只要畫出其中一條直線即可。】



2. 【已知】如右圖， $\overline{AB} = \overline{DE}$ 、 $\overline{BC} = \overline{EF}$ 、 $\angle BAC = \angle EDF > 90^\circ$ 。
【試證】 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ 。

