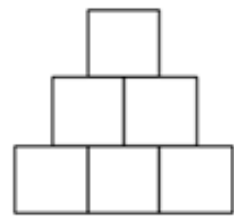


張進通許世賢文教基金會 109 學年度雲嘉南區國中數學能力競試

數學二試題

一、填充題：每題 5 分，共 80 分

- 化簡： $\frac{2020^3 - 2 \times 2020^2 - 2018}{2020^3 + 2020^2 - 2021} =$ \_\_\_\_\_。
- 康橋國際學校有來自美洲、歐洲和亞洲三種地區的學生，已知美洲和亞洲的學生人數相加是歐洲學生人數的 2 倍，且當美洲學生人數減少 7 人，亞洲學生人數增加 11 人時，美洲學生人數就是亞洲學生人數的 2 倍，現知道這三種地區的學生人數中，最多的是 135 人，則此學校的學生總人數是\_\_\_\_\_人。
- 一個十位數字與百位數字都是 0 的四位數，它正好等於數字和的 778 倍；若交換它的千位數字與個位數字，得到一個新的四位數，它正好等於數字和的  $k$  倍，則  $k$  的值為\_\_\_\_\_。
- 求  $(1 + \frac{1}{1 \times 3})(1 + \frac{1}{2 \times 4})(1 + \frac{1}{3 \times 5}) \times \cdots \times (1 + \frac{1}{109 \times 111})(1 + \frac{1}{110 \times 112}) =$ \_\_\_\_\_。
- 已知  $a$  是方程式  $x^2 - 3x + 1 = 0$  的一根，則  $2a^2 - 5a - 2 + \frac{3}{1+a^2}$  之值為\_\_\_\_\_。
- 已知直線  $L_1: x - y + 4 = 0$ 、 $L_2: 2x + y - 10 = 0$  與  $x$  軸圍成一個三角形，此三角形有內接正方形  $ABCD$ ，其中  $A$  在  $L_1$  上， $B$  在  $L_2$  上， $C$ 、 $D$  在  $x$  軸上，則此正方形的邊長為\_\_\_\_\_。
- 用 6 個邊長為 1 的正方形排成如右圖，則能將此圖形完全覆蓋的圓，其最小半徑為\_\_\_\_\_。



- 一個  $4 \times 4$  的反幻方是指將數字 1~16 填入  $4 \times 4$  方格表內，使得每直行上、每橫行上、每條對角線上的數字和，經排序後恰形成十個連續的正整數。如圖是一個尚未完成的反幻方。請問 \* 號所在方格內應填入的數字為\_\_\_\_\_。

		*	14
	9	3	7
	12	13	5
10	11	6	4

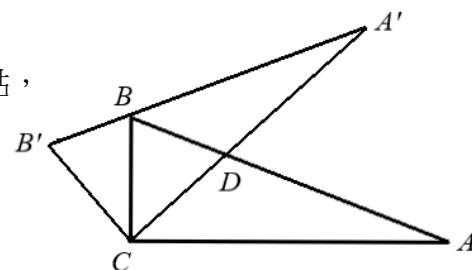
9. 已知一個四位數，恰好等於它的各位數字和的四次方，則這個四位數為\_\_\_\_\_。

10. 哥哥與弟弟各自等速度同時從甲地前往乙地，當哥哥走了三分之一路程時，弟弟才走 9 公里，當弟弟走了三分之一路程時，哥哥已經走了 16 公里，則當哥哥走完全程時，弟弟還有\_\_\_\_\_公里路程要走。

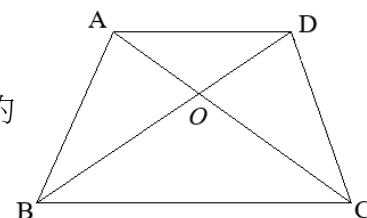
11. 若直線  $kx + (k+1)y - 1 = 0$  與  $x$ 、 $y$  軸所形成的三角形面積為  $R_k$ ，則  $R_1 + R_2 + R_3 + \cdots + R_{2020} =$ \_\_\_\_\_。

12. 已知  $\sqrt{x} + \sqrt{x+7} + 2x + 2\sqrt{x^2 + 7x} - 35 = 0$ ，則  $\sqrt{x+7} - \sqrt{x} =$ \_\_\_\_\_。

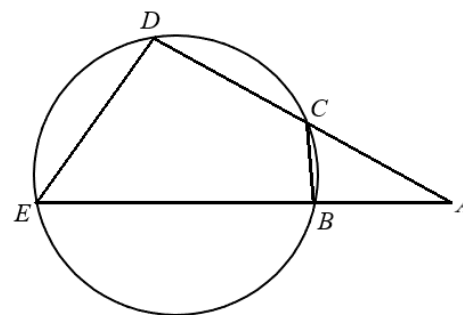
13. 如右圖，在  $\triangle ABC$  中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle CAB = 22^\circ$ ，將  $\triangle ABC$  以  $C$  點為中心，逆時針方向旋轉一個角度  $\alpha$  到  $\triangle A'B'C'$  的位置，其中  $A'$ 、 $B'$  分別是  $A$ 、 $B$  的對應點，且  $B$  在  $\overline{A'B'}$  上，設  $\overline{CA'}$  交  $\overline{AB}$  於  $D$  點，則  $\angle ADC$  的角度為\_\_\_\_\_度。



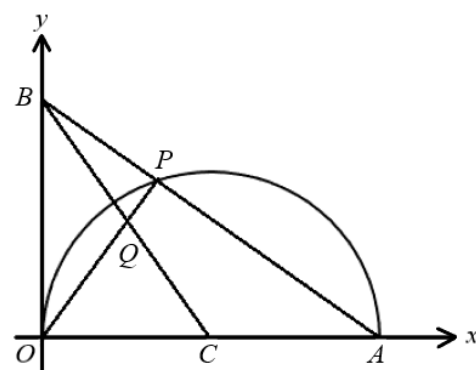
14. 如右圖，四邊形  $ABCD$  是梯形， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ，設  $\overline{AC}$  交  $\overline{BD}$  於  $O$ ， $\triangle AOB$  的面積比  $\triangle AOD$  的面積多 2 平方公分，且  $\triangle BOC$  的面積比  $\triangle COD$  的面積多 3 平方公分，則梯形  $ABCD$  的面積為\_\_\_\_\_平方公分。



15. 如右圖，圓之兩弦  $\overline{EB}$ 、 $\overline{DC}$  的延長線交於  $A$ ， $\angle A = 30^\circ$ ， $\overline{AB} = 1$ ， $\overline{AC} = \frac{3}{2}$ ， $\overline{BE} = 2$ ，則四邊形  $BCDE$  的面積為\_\_\_\_\_。



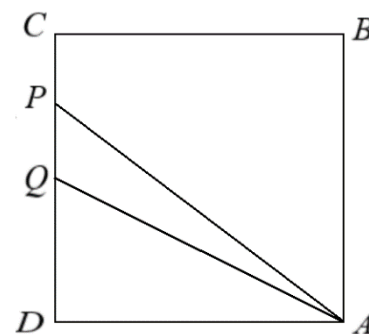
16. 如右圖， $O(0, 0)$ 、 $A(4, 0)$ 、 $B(0, 3)$ ， $\overline{AB}$  與以  $\overline{OA}$  為直徑之半圓交於  $P$  點， $C$  點為半圓之圓心， $\overline{BC}$  交  $\overline{OP}$  於  $Q$  點，則  $\overline{PQ}$  之長為\_\_\_\_\_。



二、計算證明題：每題 10 分，共 20 分

1. 如圖所示，在正方形  $ABCD$  中， $Q$  為  $\overline{CD}$  的中點， $P$  在  $\overline{CD}$  上且  $\angle BAP = 2\angle QAD$ 。

求證： $\overline{AP} = \overline{CP} + \overline{CB}$  (10 分)



2. 如圖所示，圓  $O_1$  與圓  $O_2$  交於  $A$ 、 $B$  兩點，圓  $O_1$  的弦  $\overline{BC}$  切圓  $O_2$  於  $B$  點，

圓  $O_2$  的弦  $\overline{AD}$  切圓  $O_1$  於  $A$  點， $\overline{AC}$  交圓  $O_2$  於  $E$  點， $\overline{BD}$  交圓  $O_1$  於  $F$  點。

- (1) 求證： $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$  (5 分)

- (2) 求證： $\overline{CE} = \overline{DF}$  (5 分)

