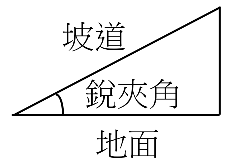
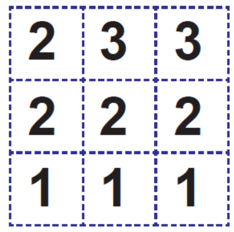
國立嘉義高級中學 111 學年度科學班甄選入學科學能力檢定　數學科能力檢定試題

一、填充題：(60 分，每題 5 分)

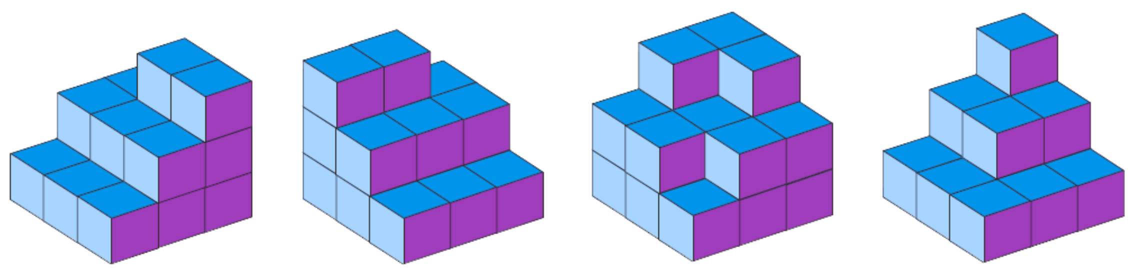
1. 根據內政部營建署《建築物無障礙設施設計規範》，如右(示意)圖，坡道和地面(視為水平面)的銳夾角不得超過 5 度。已知某坡道的最高點到地面的高度為 100 公分，試問此坡道的長度至少要多少公分才合乎前述的規範？
(答案四捨五入至整數位，其中 $\sin 5^\circ \approx 0.0872$ ， $\cos 5^\circ \approx 0.9962$ ， $\tan 5^\circ \approx 0.0875$)



2. 右圖是一個立體圖形的上視圖，在小方格內標示的號碼是指有多少個小立方體堆疊在這個小方格上方。試問下列哪一個選項是此上視圖所表示的立體圖形？(單選題)

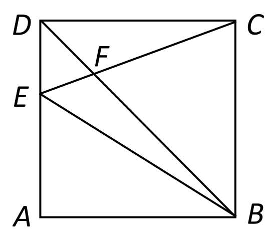


(A)　(B)　(C)　(D)



3. 現有兩個三位數$ABC < DEF$，其和為另一個三位數PQR，其中$A, B, C, D, E, F, P, Q, R$恰為$1\sim 9$的正整數各一個，能滿足此條件的三個三位數並不唯一(如$327+654=981$為其中一種可能性)，試求滿足此條件的所有三位數中，能讓其和PQR最小的三位數數對$(ABC, DEF, PQR)=$？

4. 如右(示意)圖，有一正方形$ABCD$，E為$\overline{AD}$上一點，$\overline{EC}$與$\overline{DB}$交於點F，已知ΔDEF與ΔEAB的面積分別是2與16(平方單位)，試求正方形$ABCD$的面積是多少平方單位？



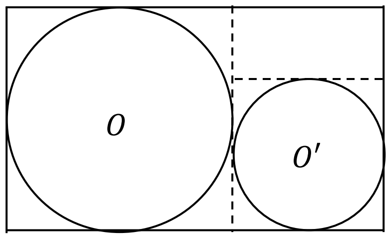
5. 試將x^4+64因式分解成整係數多項式的乘積。(若不能分解則請在答案格寫不能分解)

6. 已知對所有的正整數n，數列$\langle a_n\rangle$滿足$a_{n+6}=a_{n+5}-a_{n+4}+a_{n+3}-a_{n+2}+a_{n+1}-a_n$，
且$a_1=5$，$a_2=8$，$a_3=13$，$a_4=21$，$a_5=34$，$a_6=55$，試求$a_{111}+a_{312}=$？

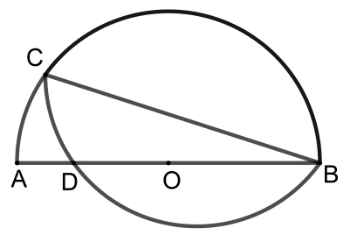
7. 設a, b為正整數且$a^2-b^2=111-4a$，試求$a+b$之值為？(有兩解，答對一個有部分分數)

8. 試問$\underbrace{222\cdots22}_{111\text{個}}$除以 13 的餘數為何？

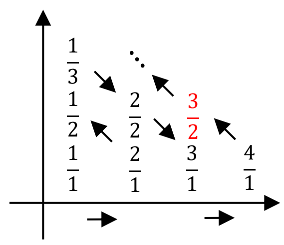
9. 右(示意)圖為一塊長方形壓克力板，圓O與長方形三邊均相切。先剪去包含圓O的正方形後，在剩下的長方形壓克力板上畫出與三邊均相切的圓O'，再剪去包含圓O'的正方形後剩下的長方形與原來的長方形壓克力板相似，若剩下的小長方形壓克力板面積是2(平方單位)，試求原來的大長方形壓克力板面積是多少平方單位？



10. 如右(示意)圖，$\overline{AB}$ 為直徑，O 為圓心，今將弧$\widehat{BC}$對 $\overline{BC}$ 對折後交 $\overline{AB}$ 於 D 點，若 $\overline{AD}=4$ ，$\overline{BD}=6$ ，試求 $\overline{BC}$ 的長度是多少？



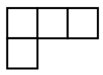
11. 如右(示意)圖，將第一象限的格子點(x,y坐標均為整數的點) (m,n)與分數 $\frac{m}{n}$ 做一一對應，並依照順序 $\frac{1}{1},\frac{2}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{2},\frac{3}{1},\frac{4}{1},\frac{3}{2},\cdots$形成一個數列，試求第2022個點對應到的分數(以最簡分數表示)是多少？(已知$64^2=4096$)



12. 若$x>y>0$，且$xy=1$，當$x=a$，$y=b$時，$\frac{x^2+y^2}{x-y}$ 會有最小值c，試求數對$(a,b,c)=$？

(答對其中一部分有部分分數)

二、計算與證明題：(40 分)

1. 右圖 A 與圖 B 分別有 48 個留白的空格，試問是否存在以  (可以旋轉與翻轉)鋪滿圖 A 與圖 B 的方法？若存在，請在格線上畫出一種方法。若不存在，請說明理由。(8%)

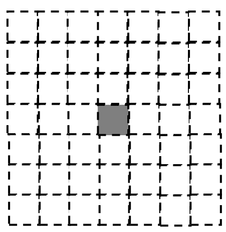


圖 A

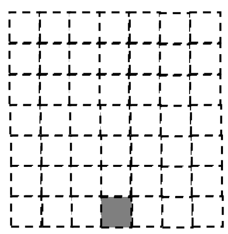
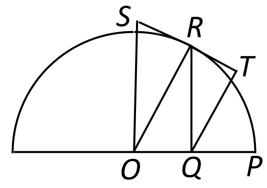


圖 B

2. 如右(示意)圖，以O為圓心，$\overline{OP}=\frac{a+b}{2}$ (a,b為正實數)為半徑畫一半圓，在$\overline{OP}$上取一點Q



使得$\overline{QP}=b$，並做$\overline{QR}\perp\overline{OP}$且交半圓於$R$點，過$R$做$\overline{RS}\perp\overline{OR}$且滿足$\overline{RS}=\frac{a-b}{2}$，過$R$做$\overline{RT}\perp\overline{QT}$

且滿足$\Delta RTQ\sim\Delta OQR$，試利用此圖證明不等式$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geq\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}\geq\frac{2ab}{a+b}$，並利用此圖說明前述不等式中每一個等號成立的條件(9%，未說明理由者不給分)。

3. 將平面上(凸)正多邊形的概念拓展到立體空間時可得(凸)正多面體，其條件為：

(i)每個面皆是全等的正n邊形。 (ii)每個頂點皆連接k個邊。

如日常生活常見的骰子即為其中一種(凸)正多面體，每個面都是正四邊形(即正方形)，每個頂點皆連接三個邊。試利用條件(i)、(ii)推理出空間中應有幾種(凸)正多面體？

(6%，僅有答案未附理由或使用條件以外公式者僅得部分分數)

4. (1)在下圖一中所有數字的和是$S_n=1+2\times2+3\times3+\cdots+n\times n=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$，圖二與圖三是將圖一分別旋轉120°與240°後所得，觀察到圖一、二、三最上方的三個數字和是$1+n+n=2n+1$，試以此資訊推導出級數和S_n的公式(以n表示)。

(4%，僅有公式未附理由或理由不完整者僅得部分分數)

圖一	圖二	圖三
1 $2\quad 2$ $3\quad 3\quad 3$ $\therefore\qquad\ddots$ $n\ \cdots\ n\ \cdots\ n$	n $\therefore\quad\ddots$ $3\qquad n$ $2\quad 3\qquad\ddots$ $1\quad 2\quad 3\ \cdots\ n$	n $\therefore\quad\ddots$ $n\qquad 3$ $\therefore\qquad 3\quad 2$ $n\ \cdots\ 3\quad 2\quad 1$

(2)試利用(1)的公式計算$1^2+3^2+5^2+\cdots+99^2=$？(4%)

5. 如右圖，$\overline{AM}$為$\triangle ABC$中$\overline{BC}$的中線，直線L交$\overline{AB}$、$\overline{AM}$、$\overline{AC}$分別於D、E、F三點，

過B、C做$\overline{ME}$平行線分別交直線L於P、Q兩點。試證明：

$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}$、$\frac{\overline{AM}}{\overline{AE}}$、$\frac{\overline{AC}}{\overline{AF}}$三數成等差數列。

(9%，可先說明$\overline{BP}$、$\overline{ME}$、$\overline{CQ}$成等差，然後再利用相似三角形的性質)