

國立嘉義高級中學 112 學年度科學班甄選入學實驗實作

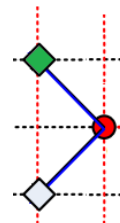
數學科實驗實作試題

本試卷共有三大題，包含填充題、問答題、證明題，證明題將依你的答題嚴謹性與完整性評分，請在答案卷上有條理的作答。無合理推論步驟的答案將無法獲得分數。可使用試場提供的計算機。

1. (27 分) 無人機國家隊在嘉義。2022 年亞洲無人機 AI 創新應用研發中心於前台灣體育大學太保分校校址成立，未來從研發、裝配到交貨皆可在嘉義一次完成。

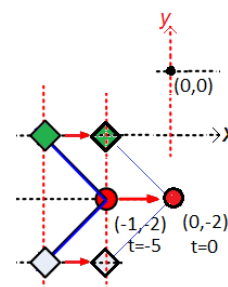
小嘉在科學班專題研究課時，進行無人機位置分析。

小嘉設計的無人機機隊共有三台無人機，分別是一台紅色長機、一台左後側綠色僚機、一台右後側灰色僚機，在觀測時間內皆位於 10 公尺高的平面飛行，以下我們皆只考慮 xy 平面。在觀測時間內該三台無人機的相對位置必須一直保持不變，如右圖一所示，長機位於該等腰直角三角形的直角處，綠色僚機及灰色僚機分別位於 45 度角處。且等腰直角三角形短邊長度為 $\sqrt{2}$ ，長邊長度為 2。觀測時間內該機隊一直保持此隊形。



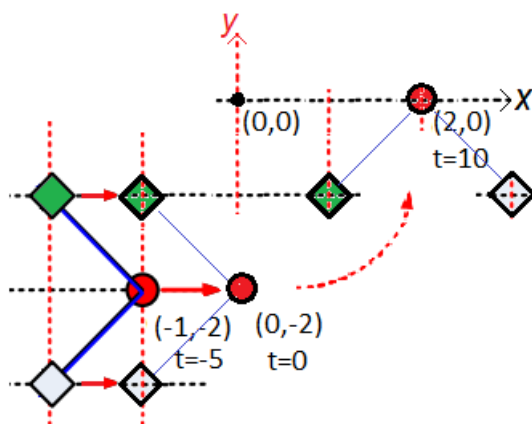
(圖一)

在時間 $t = -5$ 到時間 $t = 0$ 時，該機隊為直線飛行。當時間 $t = 0$ 時，長機位於直角座標 $(x, y) = (0, -2)$ 的位置，左後側綠色僚機位於直角座標 $(x, y) = (-1, -1)$ 的位置，右後側灰色僚機位於直角座標 $(x, y) = (-1, -3)$ 的位置。如右圖二所示。



(圖二) 機隊在時間 $t = -5$ 與 $t = 0$ 的位置圖。

在 $t = 0$ 時，長機開始沿著圓周繞圓，該圓的圓心為 $(x, y) = (0, 0)$ ，半徑為 2。在 $t = 10$ 時，長機結束繞圓，此時長機位於直角座標 $(x, y) = (2, 0)$ 的位置，隨行的左後側綠色僚機位於直角座標 $(x, y) = (1, -1)$ 的位置，隨行的右後側灰色僚機位於直角座標 $(x, y) = (3, -1)$ 的位置。如下圖三所示。



(圖三) 機隊在時間 $t = -5$ 、 $t = 0$ 、 $t = 10$ 時的位置圖。

Q：(3 分)請寫下左後側綠色僚機 x, y 座標，在時間 $t = 0$ 到 $t = 10$ 之間， x, y 的關係式。

(3 分)請寫下右後側灰色僚機 x, y 座標，在時間 $t = 0$ 到 $t = 10$ 之間， x, y 的關係式。

(21 分)證明此兩個關係式皆為正確的僚機軌跡。

【行進路線有很多種，必須證明自己的路線是否符合題意。】

【提示：基礎版行進路線：設兩僚機座標連線為 $L1$ ，長機與圓心 $(0, 0)$ 座標連線為 $L2$ 。在 $t = 0$ 到 $t = 10$ 之間， $L1$ 與 $L2$ 平行。】

【考試後回家可以繼續思考與圓相關的運動問題，進一步搜尋其在天文物理與機械工程中的使用。】

2. (38 分) 綜藝節目常玩的猜數字遊戲「幾 A 幾 B」。若有位知道最佳解法方法的玩家，該玩家最多猜七次可猜中數字。在了解這個最佳解法之前，小高先設計一個簡易的四個數字版本。

此四個數字猜數字遊戲規則如下：

Step 1. 電腦(或是莊家)先從 1,2,3,4 四個數字中挑選第一個數字，為求方便先命名此數字為 L。再從剩下的三個數字中挑選第二個數字，為求方便命名此數字為 M。電腦(或是莊家)先後挑選了兩個相異的數字 L、M。此遊戲的正確答案即為數對(L,M)。

Step 2. 玩家從 1,2,3,4 四個數字中挑選第一個數字，為求方便先命名此數字為 P。再從剩下的三個數字中挑選第二個數字，為求方便命名此數字為 Q。玩家先後挑選了兩個相異的數字 P、Q。此次玩家猜測該數對(P,Q)為正確答案。

Step 3. 若玩家與電腦(莊家)選到相同的數對，也就是 $P=L$ 且 $Q=M$ ，則電腦(莊家)顯示猜數字的結果為 2A0B。遊戲結束。

(2A0B 表示玩家選的數對中出現 2 個正確數字，且這兩個數字的位置正確。)

Step 4. 4.1 若玩家選到的 $P=L$ 但 $Q \neq M$ ，或是，玩家選到的 $P \neq L$ 但 $Q=M$ ，則電腦顯示猜數字的結果為 1A0B。

(1A0B 表示數對中出現 1 個正確數字且位置正確。)

4.2 若玩家選到的 $P=M$ 且 $Q=L$ ，則電腦顯示猜數字的結果為 0A2B。

(0A2B 表示數對中出現 2 個正確數字但位置錯誤。)

4.3 若玩家選到的 $P=M$ 但 $Q \neq L$ ，或是，玩家選到的 $P \neq M$ 但 $Q=L$ ，則電腦顯示猜數字的結果為 0A1B。

(0A1B 表示數對中出現 1 個正確數字但位置錯誤。)

4.4 若玩家選到的 $P \neq L$ 且 $P \neq M$ 且 $Q \neq L$ 且 $Q \neq M$ ，則電腦顯示猜數字的結果為 0A0B。

(0A0B 表示數對中沒有出現任何正確數字。)

Step 5. 只要電腦顯示出非 2A0B 的猜數字結果，就要回到 Step2，繼續遊戲。

Q：(10 分)請設計一個最多三次可以猜出此遊戲正確答案的最佳解法。

(28 分)證明無論何種狀況，依照此解法，最多三次可以猜出正確答案。

【提示：在此遊戲中電腦不會顯示 1A1B，這也是需要證明的一部分。】

【考試後回家可以繼續思考，如何證明綜藝節目的猜數字最多七次可以猜中。】

3. (35 分) 在孟德爾的遺傳實驗中，豌豆的高莖/低莖表現型皆受同一基因座上的對偶基因(等位基因)T 和 t 控制。高莖性狀為顯性性狀(完全顯性)，而 TT、Tt 兩種基因型表現出高莖性狀；低莖性狀為隱性性狀，而 tt 基因型表現出低莖性狀。簡言之，基因型中只要有一個顯性基因 T 出現(基因型 TT 或 Tt)，此豌豆將表現出顯性性狀；而豌豆表現出隱性性狀時，其基因型必須具有兩個隱性基因 t(基因型 tt)。

小義在科學班專題研究課時，重複豌豆遺傳性實驗。已知在小義實驗中豌豆花朵出現的性狀僅有兩種，分別為 A 顏色與 B 顏色，已知其中一個是顯性性狀(完全顯性)，另一個是隱性性狀，其受到同一基因座上的對偶基因(等位基因)顯性 R 基因和隱性 r 基因控制。在小義的實驗中，42.25%的親代豌豆花色表現出 A 顏色，57.75%的親代表現出 B 顏色。第一子代豌豆中，57.75%的花色表現出 A 顏色，42.25%表現出 B 顏色。

Q：在無其他實驗數據下，僅用現有的顯隱性對偶基因、基因型、性狀、親子代性狀比率資訊，忽略其他因素的影響【沒有遷移的情事發生、沒有淨突變發生、沒有天擇發生、沒有挑選特定配偶(亦即隨機交配)、沒有遺傳漂移的影響(族群數量夠龐大)、...】。嘗試僅用現有資訊推論該豌豆花朵的 A 顏色為顯性或隱性性狀？並推論出第一子代中具有 RR 基因型的個體占全部第一子代個體的比例？第一子代中具有 rr 基因型個體占全部第一子代個體的比例？

(1 分) _____豌豆花朵性狀 A 顏色為何種性狀？ ① 顯性性狀 ② 隱性性狀。

(3 分)第一子代中具有 RR 基因型的個體占全部第一子代個體的比例_____。

(3 分)第一子代中具有 rr 基因型的個體占全部第一子代個體的比例_____。

(28 分)上述所有結論的推論過程。

【考試後回家可以繼續思考，若得到其他數據、模型中加入其他因素時，數學模型如何修改。】

【數學充滿在科學各個角落，俯拾即是數學。】

試題結束