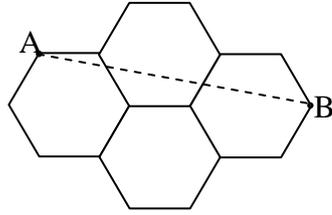


張進通 許世賢 教育事務基金會 100 學年度雲嘉區國中數學競試試題(第二試)

一、填充題：(每題 5 分，共 70 分) 答案請寫在答案卷上

1. 已知蜜蜂建築的蜂巢是以正六邊形彼此相連而構成。下圖中有四個相連的正六邊形，正六邊形的邊長為 4，試求 A、B 兩點的距離。



2. 如下圖，有兩個直徑各為 30、24 的半球形空碗，若將大碗正放於小碗上方(不計碗的厚度)，試求堆疊的高度。

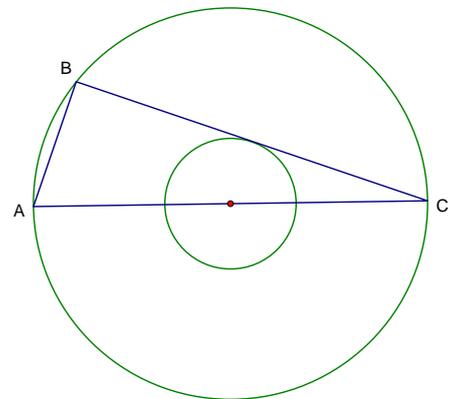


3. 隨機取出 1440 的一個正因數，試求取出此正因數會小於 17 的機率。

4. 座標平面上有一條直線通過相異三點  $A(2a, 3b)$ ， $B(3b, 2a)$ ， $C(2a - 3b, 3b - 2a + 2)$ ，則此直線必不通過第幾象限？

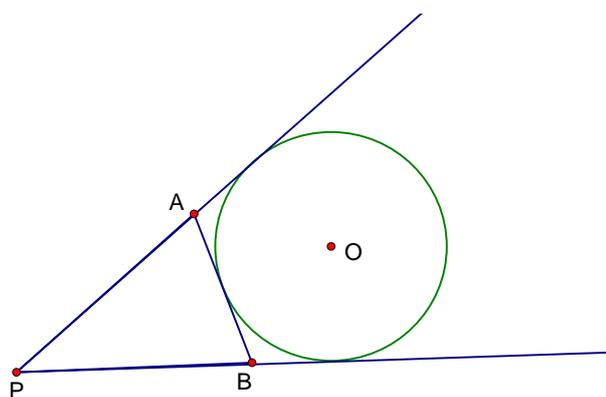
5. 滿足  $|x - 2| + |x - 10| < \sqrt{98}$  的所有整數  $x$  的和是多少？

6. 如右圖，已知兩同心圓之半徑比為 1:3，若  $\overline{AC}$  為大圓的一直徑，而  $\overline{BC}$  為大圓的一條與小圓相切的弦，且  $\overline{AB} = 12$ ，試問  $\overline{BC} = ?$



7. 座標平面上有一直線  $L: x - y = 0$ ，A、B 兩點座標分別為  $(4, 3)$ 、 $(5, 1)$ ，若在直線  $L$  及  $x$  軸上各找一點 P、Q，使  $\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB}$  的值最小，則此最小值為何？

8. 如右圖，已知  $\angle APB = 40^\circ$ ，圓  $O$  與  $\overline{AB}$ 、 $PA$  射線、 $PB$  射線均相切，則  $\angle AOB = ?$



9. 若  $x = \sqrt{2011 + \sqrt{2011 + \sqrt{2011 + \sqrt{2011 + \dots + \sqrt{2011}}}}}$  (左式共有 2011 個 2011)，且  $x$  之值介於兩連續整數  $n$  與  $n+1$  之間，試求  $n$  之值。

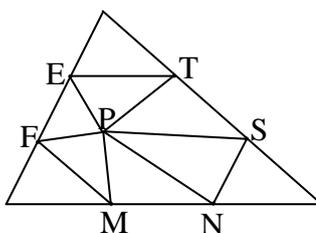
10. 在密碼學中人們將 26 個英文字母按順序分別對應整數 0 到 25，如下表：

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21

W	X	Y	Z
22	23	24	25

現有一密碼單字是由四個字母構成，此四個字母由左而右對應的數值分別為  $x_1$ 、 $x_2$ 、 $x_3$ 、 $x_4$ ，若整數  $7x_1 + x_2$ 、 $3x_2 + x_3 + 2x_4$ 、 $5x_4$  除以 26 的餘數分別為 6、0、7、9，試求這密碼單字。(以大寫英文字母表示)

11. 把一個四位數  $a_1a_2a_3a_4$  的數字順序顛倒為  $a_4a_3a_2a_1$  且顛倒後仍為四位數，例如 1234 顛倒為 4321、5578 顛倒為 8755...。若有一個四位數顛倒後的數值較原四位數增加 1179，這樣的四位數共有多少個？
12. 三邊長為 5、7、8 的三角形中，每邊各有兩點將該邊三等分(如下圖所示)。若  $P$  位於六邊形  $EFMNST$  的內部，試求  $\triangle PET$ 、 $\triangle PFM$ 、 $\triangle PNS$  的面積和。



13. 設  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ ，且  $f^{(2)}(x) = f(f(x))$ ， $f^{(3)}(x) = f(f(f(x))) \cdots$

$f^{(n)}(x) = f(\underbrace{f(f \dots f(x)))}_{n \text{ 個 } f})$ ，則  $f^{(100)}(2) = ?$

14. 試求方程式  $(2x+1)(3x+1)(4x+1)(12x+1) = 3$  的實數解。

二、計算題：(30 分)

1. (1)  $k$  為正整數，試證明： $\frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} < \frac{1}{\sqrt{k}} < \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}}$  (5 分)

(2) 利用第(1)小題計算  $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}}$  的整數部分為何？(5 分)

2. 四人互相傳球，要求接球後馬上傳出。由甲先傳第一次，設經過  $n$  次傳球後，球仍回到甲手中的傳球方法數為  $f(n)$ ，試求：

(1)  $n$  次傳球後所有的傳球方法數為何？(3 分)

(2) 試計算  $f(4)$  之值。(3 分)

(3) 求出  $f(n)$  與  $f(n-1)$  的關係式 ( $n \geq 2$ )。(3 分)

(4) 試利用第(3)小題求出  $f(7)$  之值。(3 分)

3. 設  $a, b, c$  為正實數，有一邊長為  $a+b+c$  的正方形，如下圖所示，利用此圖證

明： $\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2} \geq \sqrt{2}(a+b+c)$  (8 分)

