

張進通 許世賢 教育事務基金會 100 學年度雲嘉區國中數學競試試題(第一試)

一、填充題：(每格 5 分，共 70 分) 答案請寫在答案卷上

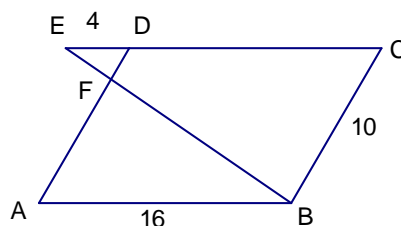
1. 試計算 $(5^{20} + 100 \times 5^{18})^2 - 4 \times 5^{41} = 5^k$ ，則 $k = ?$

2. 已知 $x - y = 5$ ， $x^2 + xy + y^2 = 6$ ，試求 $x^4 + y^4 - x^3y - xy^3$ 的值。

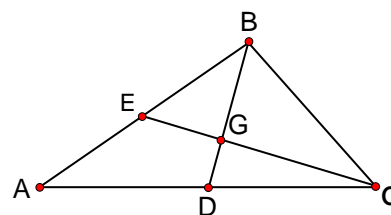
3. 若方程式 $\frac{(x+2)(x+1)-(m+1)}{(x+2)(m-1)} = \frac{x+1}{m}$ 的各根相等，試求 m 之值。

4. 某別墅有一個由四塊正方形的玻璃拼成的田字形窗戶，窗外路燈的光線（假設路燈是一個點光源）透過窗戶在地板上形成一個變形的田字形光影。在地板上建置一個直角坐標系，發現田字形光影外框的四個頂點的坐標分別為 $(-4, 40)$ 、 $(16, 0)$ 、 $(16, 40)$ 和 $(28, 16)$ ，試求田字形窗戶的中心投影在地板上的坐標。

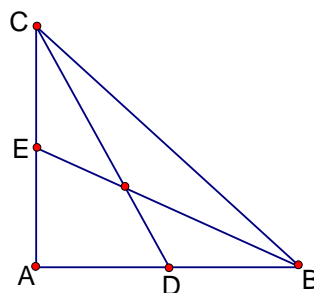
5. 如右圖，平行四邊形 $ABCD$ 中， $\angle ABC = 120^\circ$ ， $\overline{AB} = 16$ ， $\overline{BC} = 10$ ，延長 \overline{CD} 至 E ，使得 $\overline{DE} = 4$ ，若 \overline{BE} 交 \overline{AD} 於 F ，求 \overline{BE} 的長度。



6. 如右圖， $\triangle ABC$ 中， \overline{BD} 與 \overline{CE} 分別為 \overline{AC} 及 \overline{AB} 之中線，且 $\overline{BD} \perp \overline{CE}$ ， $\overline{BD} = 12$ ， $\overline{CE} = 18$ ，求 $\triangle ABC$ 的面積？



7. 如下圖， $\triangle ABC$ 為直角三角形， D 、 E 分別為 \overline{AB} 及 \overline{AC} 中點，且 $\overline{CD} = 12$ ， $\overline{BE} = \sqrt{101}$ ，則 $\overline{BC} = ?$



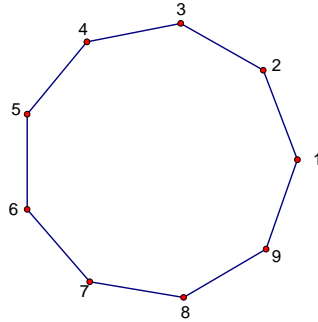
8. 將正奇數1、3、5、7...，排成五行，按右圖的格式排下去，若2011所在的位置為第m列、第n行，試求數對(m,n)。

	第一行	第二行	第三行	第四行	第五行
第一列		1	3	5	7
第二列	15	13	11	9	
第三列		17	19	21	23
第四列	31	29	27	25	
第五列		33	35	37	39
	47	45	43	41	
		49	51	53	55
	•	•	•	•	
		•	•	•	•
	•	•	•	•	

9. 一個公正的骰子擲五次，試求至少有四次得到五點或六點的機率。
10. 已知三角形三邊長為 8、8、4，則這三角形的外接圓半徑與內切圓半徑的比值為何？
11. 一個「訊息」是由一串五個數字排列組成，且每位數字都只能是0、1、2，例如12010與01022就是兩個不同的訊息。兩個訊息的「距離」定義為此兩組數字串相對應位置中，數字不同的位置數。例如，數字串 11012 與 01011 在第一及第五這兩個位置的數字不同，所以訊息 11012 與 01011 的距離為2。試問與20110距離為3的訊息有幾個？
12. 設數列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, \dots, a_n$ 為由正整數構成的等差數列且此數列的公差為 d 。若 $a_1 = 1951, a_n = 2011$ ，試求 $n + d$ 的最小值。
13. 若一正整數的各位數字都不為 0 且此正整數之各位數字和為 7，則所有這些正整數的位數中 3 出現的次數有幾次？
14. 設 k 為整數，且 $4 < k < 40$ ，若方程式 $x^2 - 2(2k - 3)x + 4k^2 - 14k - 8 = 0$ 有兩個整數根，則 $k = ?$

二、計算題：(30 分)

1. 一正九邊形之九個頂點依逆時針方向編號為1,2,3,4,5,6,7,8,9(如下圖)，一跳蚤開始位於1號頂點上依逆時針方向沿邊跳動到其他頂點，第一次跳一段到2號頂點，第二次跳二段到4號頂點，...，第 k 次跳 k 段；當它跳67次後，試求哪幾號頂點跳蚤沒有停留過？(10分)



2. 一堆球，如果是偶數個則拿走一半，如果是奇數個則添加一個後再拿走一半，此稱為「均分」。目前已知箱中有 n 個球(n 為奇數且大於100)，經7次「均分」，添加過5次球後，箱中僅剩一球，試求 n 值。(10分)
3. 設 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_7$ 為自然數(正整數)，且 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6 < x_7$ ，又 $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_7 = 1000$ ，試求：
- (1) x_1 的最大值。(5 分)
 - (2) $x_1 + x_2$ 的最大值。(5 分)