

數學競試試題(第二試)

一、填充題(每題 6 分，共 66 分)

1. 定義  $K_r^n$  為  $1, 2, 3, 4, \dots, n$  中，取  $r$  個數相乘，再全部相加，例如  $K_1^2 = 1+2$ ； $K_2^3 = 1 \times 2 + 1 \times 3 + 2 \times 3$ ； $K_3^3 = 1 \times 2 \times 3$ ； $K_2^4 = 1 \times 2 + 1 \times 3 + 1 \times 4 + 2 \times 3 + 2 \times 4 + 3 \times 4$ ，求  $K_1^5 + K_2^5 + K_3^5 + K_4^5 + K_5^5$  之值為\_\_\_\_\_。
2. 一組磁磚 1 號到 225 號，現在經過下列方式來做調整：移除所有編號為完全平方數的磁磚，然後再將剩餘的磁磚重新編成從 1 號開始的連續正整數號碼。試問這樣的動作需做\_\_\_\_\_次才能將磁磚移除至剩下僅 1 塊。
3. 找出正整數  $a, b, c$  且  $a < b < c$ ，使  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{9}{10}$ ，求數對  $(a, b, c) =$ \_\_\_\_\_。
4. 數列  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{98}$  滿足  $x_1 = \frac{1}{2}$ ，且  $x_{k+1} = x_k^2 + x_k$ ，求  $\frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} + \frac{1}{x_3+1} + \dots + \frac{1}{x_{97}+1}$  的整數為\_\_\_\_\_。
5. 若一個正整數數列  $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots$ ，滿足  $A_1 < A_2 < A_3 < A_4 < \dots$ ，且具有  $A_{n+2} = A_{n+1} + A_n$  的性質，若  $A_7 = 37$ ，則  $A_8 =$ \_\_\_\_\_。

6. 如圖 1，半徑分別為 1、2 兩外切圓， $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$  為外公切線，求  $\overline{AB} + \overline{BD} =$ \_\_\_\_\_。

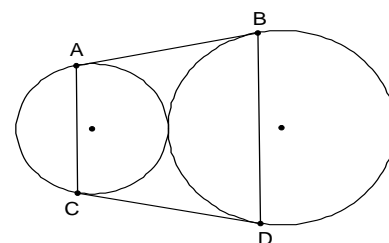


圖 1

7. 求  $4 \times 13^5 - 3 \times 13^4 + 2 \times 13^3 - 13^2 + 2 \times 13 - 1$  除以 11 的餘數為\_\_\_\_\_。
8. 有一五位數乘上 4 後，所得的積亦為五位數且各位數字恰好顛倒(即  $abcde \times 4 = edcba$ )，求此五位數為\_\_\_\_\_。
9. 直角座標平面上， $A(1, 1)$ ， $B(1, 3)$ ， $C(4, 3)$ ， $D(4, 1)$ ，有一直線過原點，且恰平分四邊形 ABCD 的面積，求此直線方程式為\_\_\_\_\_。
10. 若甲、乙、丙、丁、戊，五人年齡由小到大的排序為  $a, b, c, d, e$ ，今取其中任兩人的年齡相加，可得下列九種不同的數值：31、32、36、37、41、42、47、48、52，則數對  $(b, d) =$ \_\_\_\_\_。

11. 如圖 2，ABCD 為邊長 60 m 的正方形，今甲、乙、丙三人分別於頂點 A、B、C 依逆時針方向沿邊行進，若甲、乙、丙三人的速率分別為  $2 \text{ m/sec}$ ， $3 \text{ m/sec}$ ， $4 \text{ m/sec}$ ，則經過\_\_\_\_\_(1)\_\_\_\_秒後三人第一次會合在\_\_\_\_\_(2)\_\_\_\_\_。

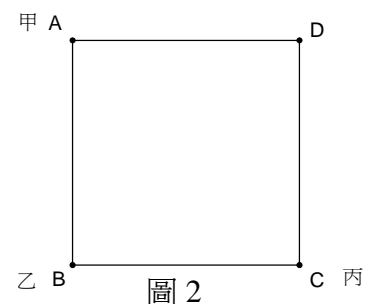


圖 2

二、計算題(34 分)

- 1 如圖 3，四邊形 ABCD 外切於圓 O，若  $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ ，證明  $\overline{AB} \times \overline{CD} = \overline{BC} \times \overline{AD}$ 。  
(10 分)

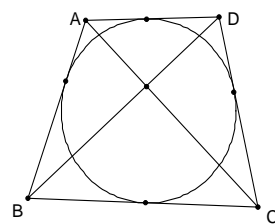


圖 3

- 2 如圖 4，在  $\triangle ABC$  中， $\overline{FG} \parallel \overline{BC}$ ,  $\overline{EH} \parallel \overline{AB}$ ,  $\overline{DI} \parallel \overline{AC}$ ，又  $\overline{FG}$ ,  $\overline{EH}$ ,  $\overline{DI}$  相交於 O， $\triangle ABC$  之面積為 A， $\triangle DFO$  之面積 =  $A_1$ ， $\triangle EOG$  之面積 =  $A_2$ ， $\triangle OHI$  之面積 =  $A_3$ ，試證  $\sqrt{A} = \sqrt{A_1} + \sqrt{A_2} + \sqrt{A_3}$  (10 分)

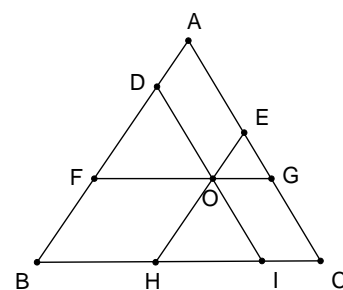


圖 4

- 3 (1)如圖 5， $\triangle ABC$  中，P、Q、R 在  $\overline{BC}$ 、 $\overline{AC}$ 、 $\overline{AB}$  的線上，且若 P、Q、R 三點共線，試證  $\frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} \cdot \frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}} = 1$  (7 分)

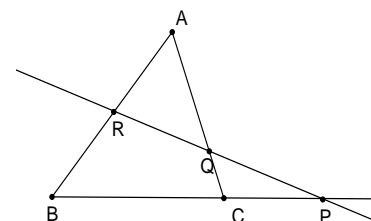


圖 5

- (2)如圖 6，平行四邊形 ABCD 對角線交於 O，且 E 為  $\overline{CD}$  上一點，

$\overline{CE} : \overline{ED} = 3 : 2$ ，若  $\overline{BE}$  交  $\overline{AC}$  於 F 點，求  $\overline{CF} : \overline{FO}$  之值。

(7 分)

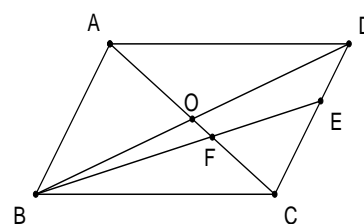


圖 6