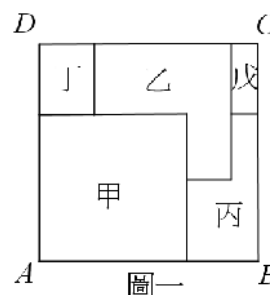


一、填充題：每題 5 分，共 55 分，答案請寫在答案卷上。

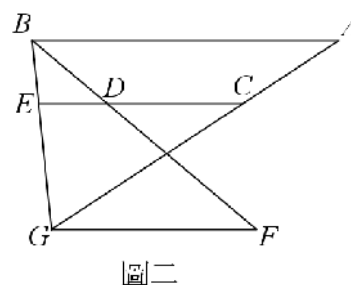
1. 六位老朋友  $a, b, c, d, e, f$  在公園聚會，見面時候握手致意問候。已知  $a$  與 4 個人握過手， $b$  與 1 個人握過手， $c$  與 3 個人握過手， $d$  與 2 個人握過手， $e$  沒跟人握過手，則到目前為止， $f$  與\_\_\_\_\_個人握過手。

2. 如圖一所示，將五張大小相同的正方形紙板邊上編號甲、乙、丙、丁、戊，再按某種次序重疊，拼成一個大正方形  $ABCD$ ，此時從上面看到甲、乙、丙部分的面積分別為 49、43、27 平方公分，則此大正方形  $ABCD$  面積為\_\_\_\_\_。



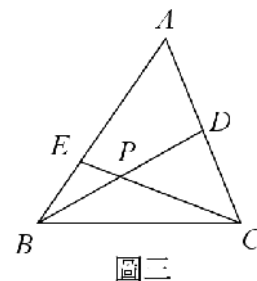
3. 有一個數列，小嘉發現了其規則為：從 1 開始往上加，若遇到個位數字為 4 或 8 時，則往上加 2；若遇到個位數字為其他數字時則往上加 3。如此得到一連串的數列：1，4，6，9，12，15，18，20，23，26，29，32，...。則此數列的第 101 項為\_\_\_\_\_。

4. 如圖二所示， $\overline{AB} \parallel \overline{CE} \parallel \overline{FG}$ ，且  $3\overline{BE} = \overline{BG}$ ， $2\overline{AB} = 3\overline{FG} = 18$ ，求  $\overline{CD}$  長度為\_\_\_\_\_。



5. 因式分解  $x^4 + 2012x^2 + 2011x + 2012$  為\_\_\_\_\_。

6. 如圖三所示， $\triangle ABC$  中， $D$  為  $\overline{AC}$  邊上一點， $E$  為  $\overline{AB}$  邊上一點， $\overline{AD} = \overline{CD}$ ， $\overline{AE} = 2\overline{BE}$ ，若  $\overline{BD}$  與  $\overline{CE}$  交於  $P$  點，求  $\triangle ABC$  面積： $\triangle PBC$  面積的比值為\_\_\_\_\_。



7. 一位著名的數學家的姓名由 5 個英文字母組成。現在，用 1、2、3、...、26 這 26 個數字分別替代英文字母中的 A、B、C、...、Z，如右表，那麼組成這位數學家的 5 個英文字母就出現下列關係式：

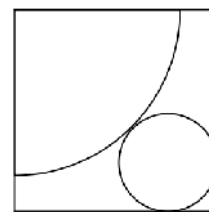
- (1) 第一個與第二個英文字母用數字替代後，和為 26；  
 (2) 第一個與第三個英文字母用數字替代後，和為 17；  
 (3) 第一個與第四個英文字母用數字替代後，和為 10；  
 (4) 第一個與第五個英文字母用數字替代後，和為 23；  
 (5) 5 個英文字母用數字替代後，總和為 61；  
 則此著名數學家的姓名為\_\_\_\_\_。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M

14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z

8. 老師在黑板上隨意寫出八個正整數（其中恰有兩數相同），學生們計算其中任意七個數的和，結果發現這樣的和僅有七種：63，65，68，70，71，72，73。則老師所寫的八個中最大的數為\_\_\_\_\_。

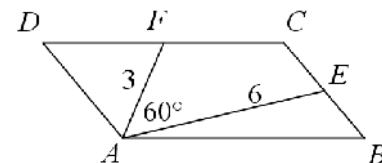
9. 如圖四所示，從邊長為 1 的正方形中，剪下一個扇形和一個圓形，分別用來做直圓錐的側面與底部，求此圓錐的底圓半徑為\_\_\_\_\_。



圖四

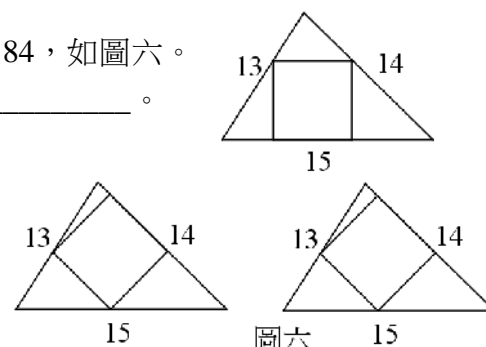
10. 如圖五所示，平行四邊形  $ABCD$  中， $E$ 、 $F$  分別為  $\overline{BC}$ 、 $\overline{CD}$  的中點， $\overline{AE} = 6$ ，

$\overline{AF} = 3$ ， $\angle EAF = 60^\circ$ ，求  $\overline{AD}$  長度為\_\_\_\_\_。



圖五

11. 有一個牧場主人，他有一個三角形的土地，其三邊長為 13、14 和 15，面積為 84，如圖六。他想從劃出一塊正方形的牧場，而且要盡可能的大，求正方形的最大邊長為\_\_\_\_\_。  
(此時正方形的其中兩個頂點必落在三角形的同一個邊上)



圖六

二、計算證明題：共 45 分，計算證明過程請寫在答案卷上。

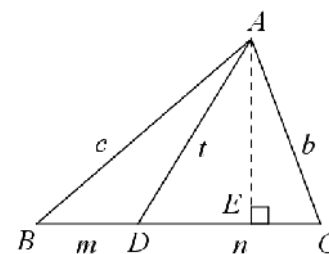
1. 甲、乙兩人玩一種稱為「Nim（捻）」的遊戲，其遊戲規則如下：共有  $n$  個棋子，甲乙兩人輪流取棋子，按照甲→乙→甲→乙→...順序取球，每人每次最少取 1 個，最多取 3 個，取到最後一顆棋子者獲勝。
- (1) 若  $n=4$ ，則甲或乙誰比較有利？請解釋之。(2 分)
  - (2) 若  $n=8$ ，則甲或乙誰比較有利？請解釋之。(2 分)
  - (3) 若  $n=101$ ，則甲或乙誰比較有利？請解釋之。(2 分)
  - (4) 對任意的正整數  $n$ ，則甲或乙誰比較有利？請解釋之。(4 分)
  - (5) 若  $n=k^2$ ，且  $k$  為任意的正整數，則甲或乙誰比較有利？請解釋之。(5 分)

2. 如圖七所示， $\triangle ABC$  中， $\overline{AB} = c$ ， $\overline{CA} = b$ ， $D$  為  $\overline{BC}$  邊上一點， $\overline{BD} = m$ ， $\overline{DC} = n$ ，

$E$  為  $\overline{CD}$  邊上一點，且  $\overline{AE} \perp \overline{CD}$ ；

- (1) 設  $\overline{DE} = x$ ，請用  $b$ 、 $c$ 、 $m$ 、 $n$  表示  $x$ 。(5 分)

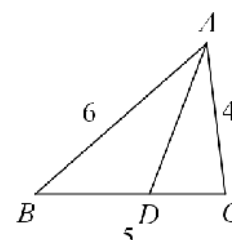
- (2) 設  $\overline{AD} = t$ ，證明「Stewart 定理」： $t^2 = \frac{b^2m + c^2n}{m+n} - mn$ 。(5 分)



圖七

- (3) 如圖八，在  $\triangle ABC$  中， $\overline{AB} = 6$ ， $\overline{BC} = 5$ ， $\overline{CA} = 4$ ， $\angle A$  的內角平分線交  $\overline{BC}$  於  $D$ ，

求  $\overline{AD}$  的長度為多少？(5 分)



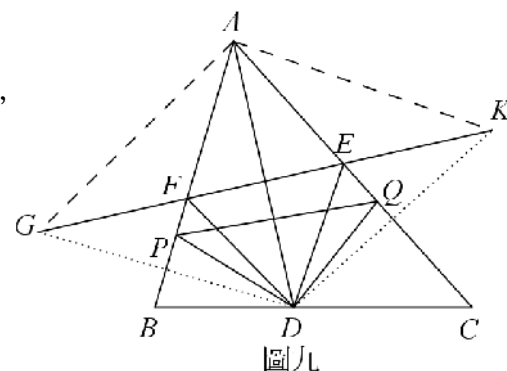
圖八

3. (1) 在銳角 $\triangle ABC$ 的每條邊上各取一點 $D$ 、 $E$ 、 $F$ ， $\triangle DEF$ 稱為 $\triangle ABC$ 的「內接三角形」。  
若每個頂點向對邊作垂線(高)，所得三個垂足為頂點構成一個三角形，稱所得三角形為原三角形的「垂足三角形」。

(a) 如圖九，在銳角 $\triangle ABC$ 的 $\overline{BC}$ 邊上一點 $D$ ，做 $D$ 關於 $\overline{AB}$ 的對稱點為 $G$ ，

再做 $D$ 關於 $\overline{AC}$ 的對稱點為 $K$ ，連接 $\overline{GK}$ 分別交 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 於 $F$ 、 $E$ ，

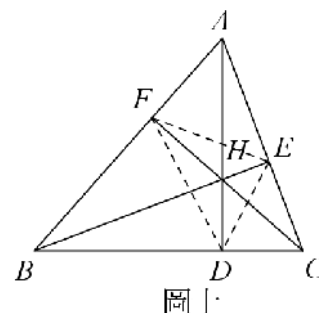
證明：若 $D$ 點固定時，此時 $\triangle DEF$ 是周長最小的內接三角形。(4分)



(b) 如圖十，已知銳角 $\triangle ABC$ 的內接三角形 $\triangle DEF$ 是它的垂足三角形，

其中 $H$ 為 $\overline{AD}$ 、 $\overline{BE}$ 、 $\overline{CF}$ 的交點。

證明： $\angle ADF = \angle ADE$ 。(4分)



- (2) 承第一試的計算證明第一題， $\triangle ABC$ 中，最大角的角度是最小角的2倍( $\angle C = 2\angle A$ )， $\overline{AB} = 6$ ， $\overline{BC} = 4$ ， $\overline{CA} = 5$ ，

如圖十一所示，且 $D$ 、 $E$ 、 $F$ 分別為 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CA}$ 、 $\overline{AB}$ 邊上一點，且 $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ 、 $\overline{BE} \perp \overline{AC}$ 、 $\overline{CF} \perp \overline{AB}$ ；

- (a) 已知「海龍(Heron)公式」： $\triangle ABC$ 三邊長為 $a$ 、 $b$ 、 $c$ ，則 $\triangle ABC$ 面積為 $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ，其中 $s = \frac{a+b+c}{2}$ 。

求 $\overline{AD}$ 與 $\overline{CF}$ 的長度分別為多少？(4分)

- (b) 求垂足三角形 $\triangle DEF$ 的周長為多少？(3分)

