張進通
許世賢

教育事務基金會 101 學年度 雲嘉南區 國中數學競試 － 數學一試題

一、填充題：每題 5 分，共 80 分，答案請寫在答案卷上。

1. $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\frac{1}{5\times6}+\cdots+\frac{1}{2011\times2012}=$＿＿＿＿＿。

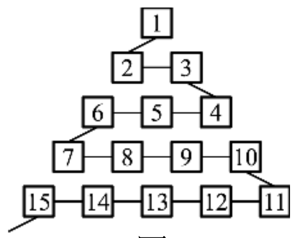
2. $\sqrt{4\times2012^2-8\times2012-8039}=$＿＿＿＿＿。

3. 解方程式$|x-2|+|x+3|=101$，則 $x=$＿＿＿＿＿。(兩解)

4. 甲乙兩人相向而行，甲從 A 地、乙從 B 地同時出發，兩人第一次相遇在離 A 地 20 公里處；相遇後，兩人速度不變，繼續前進，分別到達 B、A 之後，立即返回，又相遇在離 B 地 6 公里處。求 A、B 兩地的距離為＿＿＿＿＿公里。

5. 若一等腰三角形的底邊上的高長為 20，且三角形周長為 100，則這個等腰三角形的面積為＿＿＿＿＿。

6. 從事網路工作者經常用來解釋網路運作的蛇形模型，如圖一所示：數字 1 出現在第 1 列；數字 2，3 出現在第 2 列；數字 6，5，4（從左至右）出現在第 3 列；數字 7，8，9，10 出現在第 4 列；依此類推。求第 101 列，從左至右算，第 67 個數字為＿＿＿＿＿。



圖一

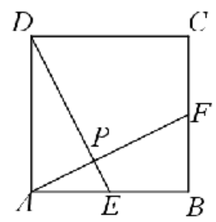
7. 有一數列，第一項為 7，從第二項開始各項依下列規定方法求得：每一項是它的前一項的平方後，各個數字的和再加 1，如：第二項的求法：$7^2=49$，4+9+1＝14，所以第二項是 14，第三項：$14^2=196$，1+9+6+1＝17，第三項是 17。試依此規定，則這個數列的第 2012 項為＿＿＿＿＿。

8. 為了方便書寫，有些人將 1115555992222 表示成$1_3 5_4 9_2 2_4$，若已知$2_x 3_y 5_z + 3_a 5_b 2_c = 5_3 7_2 8_3 5_1 7_3$，求數對$(x, y, z)=$

＿＿＿＿＿。

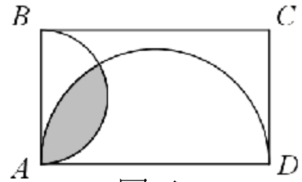
9. 如圖二所示，正方形 $ABCD$ 邊長為 2，E、F 分別為 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$ 中點，且 $\overline{AF}$ 與 $\overline{DE}$ 且交於 P 點，

求 $\overline{DP}$ 的長度為＿＿＿＿＿。



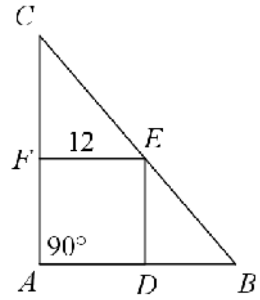
圖二

10. 如圖三所示，長方形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=2\sqrt{6}$，$\overline{AD}=6\sqrt{2}$，若以 $\overline{AB}$、$\overline{AD}$ 為直徑劃半圓且交於 P 點，求兩個半圓重疊區域(灰色區域)面積為＿＿＿＿＿。



圖三

11. 如圖四所示，$\triangle ABC$ 中，$\angle A$ 為直角，$\overline{BC}=35$，且 D、E、F 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CA}$ 上一點，已知正方形 $ADEF$ 的邊長為 12，求$\triangle ABC$ 的周長為＿＿＿＿＿。



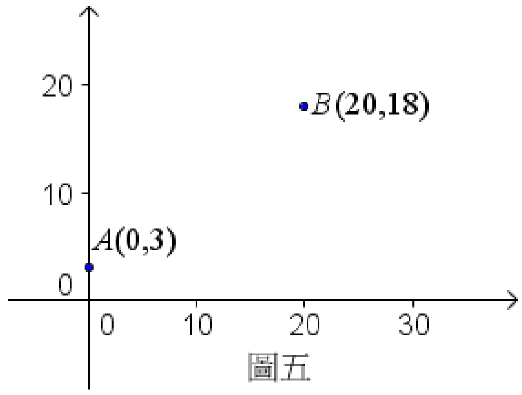
圖四

12. 已知 a、b、c 皆為實數，$a+b=8$ 且 $c^2-ab-(8\sqrt{2})c+48=0$，求數對(a , b , c)＝＿＿＿＿＿。

13. 在座標平面上，若點的座標(x,y)滿足 x 與 y 都是整數，則稱此點為「格子點（lattice point）」。

(1) 座標平面上，圓心座標為原點，若圓半徑為 5，則有＿＿＿＿＿個格子點恰在此圓上。

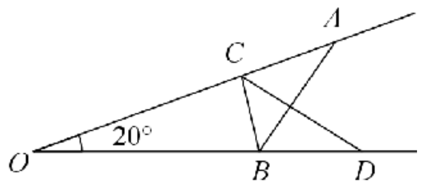
(2) 座標平面上，圓心座標為原點，若圓半徑為 65，則有＿＿＿＿＿個格子點恰在此圓上。



圖五

14. (1) 如圖五所示，坐標平面上，兩點 $A\,(0, 3)$，$B\,(20, 18)$，且點 C 為 x 軸上任一點，求$\triangle ABC$ 周長的最小值為＿＿＿＿＿。

(2) 如圖六所示，$\triangle OAD$ 中，$\overline{OA}=\overline{OD}=1$，$\angle AOD=20°$，$C$ 為$\overline{OA}$邊上任一點，B 為$\overline{OD}$邊上任一點，求$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}$的最小值為＿＿＿＿＿。

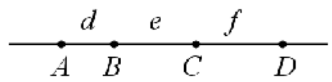


圖六

二、計算證明題：共 20 分，計算證明過程請寫在答案卷上。

1. (1) 如圖七所示，在任意直線上任取 4 點，依序為 A、B、C、D，令 $\overline{AB}=d$，$\overline{BC}=e$，$\overline{CD}=f$，

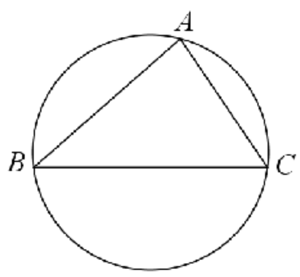
證明「尤拉（Euler）定理」：$\overline{AB}\times\overline{CD}+\overline{AD}\times\overline{BC}=\overline{AC}\times\overline{BD}$。 (5 分)



圖七

(2) 已知「托勒密（Ptolemy）定理」：若 $ABCD$ 為圓內接四邊形，則$\overline{AB}\times\overline{CD}+\overline{AD}\times\overline{BC}=\overline{AC}\times\overline{BD}$。

如圖八所示，$\triangle ABC$ 的三邊長為連續正整數，且最大角的角度是最小角的 2 倍，求此三邊長為多少？ (5 分)



圖八

2. 如圖九所示，A、B、C、D 四點共線，E、F、G、H 四點共線，

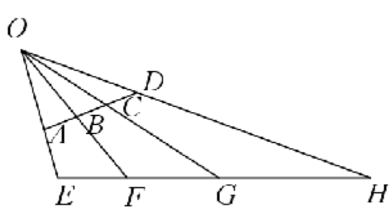
(1) 利用下列關於兩個三角形面積的性質，

性質 1：兩個三角形同底時，面積比為高比；

性質 2：兩個三角形等高時，面積比為底邊比；

性質 3：兩個三角形有一個角相等或互補時，面積比為此角兩邊乘積之比。

證明：$\dfrac{\overline{AB}\times\overline{CD}}{\overline{AD}\times\overline{BC}}=\dfrac{\overline{EF}\times\overline{GH}}{\overline{EH}\times\overline{FG}}$。 (6 分)



圖九

(2) 若 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=1$，$3\overline{EF}=2\overline{FG}=6$，則$\overline{GH}$的長度為多少？ (4 分)