

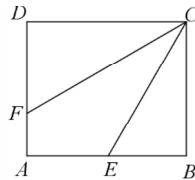
張進通許世賢教育事務基金會 108 學年度 雲嘉南區 國中數學能力競試
數學二試題

注意：請將答案填在答案卷上；若答案為分數，請化為最簡分數；若答案為根式，請化為最簡根式。

一、填充題：每題 5 分，共 70 分，答案請寫在答案卷上。

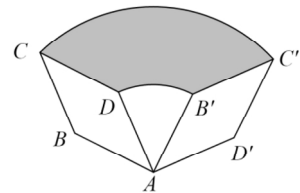
1. 化簡 $(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5})(\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{5})(-\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}) =$ _____。

2. 如右圖，長方形 $ABCD$ 中， E 、 F 分別在 \overline{AB} 、 \overline{AD} 上，
且 $\angle BCE = \angle ECF = \angle FCD$ ， $\overline{AF} = 1$ ， $\overline{BE} = \sqrt{3}$ ，
求長方形 $ABCD$ 的面積為_____。



3. 某計算機只有 $[+1]$ 與 $[\times 2]$ 兩種按鍵。當按其中一個按鍵時，計算機會自動顯示結果。例如：計算機原來顯示 5，按 $[+1]$ ，則計算機就會顯示 6，再按 $[\times 2]$ ，計算機就會顯示 12。現在計算機一開始顯示為 1，求最少要按_____次按鍵，計算機會顯示 100。

4. 如右圖，菱形 $ABCD$ 中， $\angle B = 120^\circ$ ， $\overline{AB} = 1$ 。今以 A 為圓心，將菱形 $ABCD$ 以順時針旋轉 90° 後至 $AB'C'D'$ ，求圖中陰影面積為_____。



5. 已知 $n = 3^{108}$ ，求 n 除以 11 的餘數為_____。

6. 在密碼學中，可以直接看到內容為明碼，對明碼進行某種處理後得到的內容為密碼。有一種密碼，將 26 個英文字母 a 、 b 、 c 、...、 z （不論大小寫）依次對應 1、2、3、...、26 這 26 個正整數（見表格）。當明碼對應的序號 x 為奇數時，密碼對應的序號 $y = \frac{x+1}{2}$ ；當明碼對應的序號 x 為偶數時，密碼對應的序號 $y = \frac{x}{2} + 13$ 。

字母	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
序號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

按上述規定，例如：明碼 math 可譯成密碼為 gawq，求將明碼 cysh 譯成密碼為_____。

7. 坐標平面上，直線 $ax + by + c = 0$ 不會通過第二象限，其中 a 、 b 、 c 皆不為零，則直線 $bx - cy + a = 0$ 必不通過第_____象限。（填入一、二、三或四）

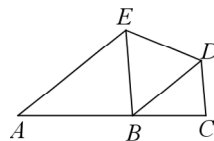
8. 已知 $a + b = 3$ ， $ab = 1$ ，求 $a^3 + a^2b + ab^2 + b^3 =$ _____。

9. 已知 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ，且 $f(5) = 1$ ， $f(6) = 2$ ， $f(7) = 5$ ，求 $f(8) =$ _____。

10. 設 a 、 b 、 c 為相異的三數，已知 $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$ ，且 $a + b$ 、 $b + c$ 、 $c + a$ 成等差數列，求 $\frac{a+b}{b+c} =$ _____。

11. 已知所有 x 都滿足 $f(x+1) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$ ，且 $f(1) = 2 - \sqrt{3}$ ，求 $f(108) =$ _____。

12. 如右圖， A 、 B 、 C 三點共線，且 $\overline{AE} \parallel \overline{BD}$ ， $\overline{BE} \parallel \overline{CD}$ ，
且 $\triangle ABE$ 的面積為 9， $\triangle BCD$ 的面積為 4，求 $\triangle BDE$ 的面積為_____。



13. 牛頓的草地與牛問題 (Newton's Problem of the Fields and Cows)：

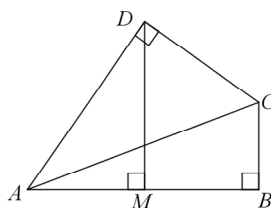
假設所有草地每平方單位一開始的牧草數量相同，草地每平方單位每日長草量保持不變，每頭牛每天吃草量也相同。

21 頭牛將面積為 1 平方單位的草地上的牧草在 12 天內吃完了；

48 頭牛將面積為 2 平方單位的草地上的牧草在 8 天內吃完了；

求 69 頭牛將面積 3 平方單位的草地上的牧草在_____天內吃完了。

14. 如右圖，四邊形 $ABCD$ 中， $\angle B = \angle ADC = 90^\circ$ ， $\overline{AB} = 24$ ，
 $\overline{BC} = 7$ ， $\overline{CD} = 15$ ， $\overline{DM} \perp \overline{AB}$ ，求 $\overline{DM} =$ _____。



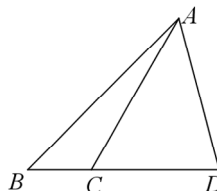
二、計算證明題：共 30 分，計算證明過程請寫在答案卷上。

1. (1) 黑暗中，盒子內有長、短不同兩種筷子各有 12 支。今隨意抓一把要確保其中至少有一雙（同長度），則一把最少要有幾支筷子呢？（給答案即可，無需說明）。（2 分）

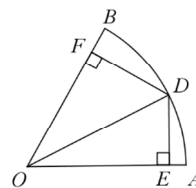
(2) 黑暗中，抽屜內有三雙襪子，其中一雙白色、一雙黑色、一雙紅色。今隨意抓一把要確保其中至少有一雙（同色），則一把最少要有幾隻襪子呢？（給答案即可，無需說明）。（2 分）

(3) 如果你手上有 51 個相異正整數，而這些正整數都是小於或等於 100，那必定會有兩個數是互質的。請你說明之。（3 分）

2. 如右圖， $\triangle ABD$ 中， $\angle ABD = 45^\circ$ ， C 在 \overline{BD} 上， $\angle ACD = 60^\circ$ ，
 $\overline{BC} = 1$ ， $\overline{CD} = 2$ ，求 \overline{AD} 的長度為多少？（7 分）



3. 如右圖，扇形中， O 為圓心， $\angle AOB = 60^\circ$ ， $\overline{DE} \perp \overline{OA}$ ， $\overline{DF} \perp \overline{OB}$ ，
已知 $\overline{DE} = a$ ， $\overline{DF} = b$ ，請用 a 、 b 表示 \overline{OD} 的長度。（7 分）



4. 費波那契數列（費氏數列 Fibonacci Sequence）：1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ...。將費氏數列的第 n 項以 F_n 表示，1634 年數學家 Girard 提出這個數列的遞迴關係： $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ ， $F_1 = F_2 = 1$ 。十八世紀初棣美弗

（de Moivre）給出公式 $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$ ，棣美弗是最早發現費氏數列與黃金比例關係的人。

(1) 請用棣美弗的公式，證明 $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ 。（4 分）

(2) 從數學角度去探討美的規律，認為美就是和諧與比例的組合，按照這種比例關係就可以組成美的圖案，這就是一個數字的比例關係，也是被公認為最具有審美意義的比例數字。為求此比例數字，我們將一條直線分成兩段，使得「長線段長度與短線段長度之比」等於「完整直線長度與長線段長度之比」，已知完整線段長為 1，求長線段長度應為多少？（2 分）

(3) 中國書法是一項獨特藝術。習字帖常用九宮格，如右圖中間陰影方格稱為中宮。

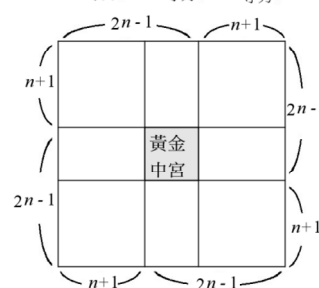
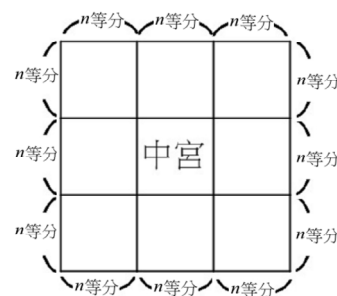
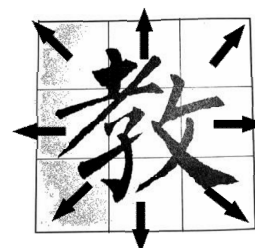
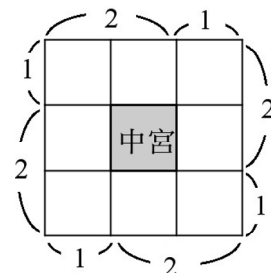
書藝有所謂「中宮緊斂，八面出鋒」（如右圖數字），此滿足開始的費氏數列

$\frac{F_2}{F_3} = \frac{1}{2} = 0.5$ ，但離「黃金比例 $\omega = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.618...$ 」很大，顯然這樣比例

的中宮，或許不是那麼容易引起人的美感。如果為了劃出更具美感的中宮，我們再將中宮的正方形邊長 n 等分（如右下圖所示），（例如： $n=3$ 時，

$\frac{3+1}{3+2} = 0.8$ ），希望 $\frac{n+1}{n+(n-1)} = \frac{n+1}{2n-1}$ 與 $\omega = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 都四捨五入到小數點後

第二位的值都相同，求最小的正整數 n 為多少？（3 分）



註1. 一般而言， $\frac{n+1}{2n-1}$ 越接近 $\omega = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 的比例， $\frac{n+1}{2n-1}$ 也會是 $\frac{F_k}{F_{k+1}}$ ，

滿足此比例中宮之正方形為黃金中宮，書法中重要筆劃若經過此黃金中宮的四頂點中某幾個點，將會更具有美感。

註2. 上世紀五十年代中有費氏數列的巧妙應用。直觀來看，我們把試驗範圍區間長度設為 1，即區間為 $[0,1]$ ，在區間中至少取兩點 c, c_1 ，且 $0 < c < c_1 < 1$ ，計算完函數值後可能去掉區間 $[0, c]$ 或 $(c_1, 1]$ ，因去掉它們的可能是相等的，故應適合關係式 $c = 1 - c_1$ ，此即說 c, c_1 是兩個對稱點。若計算比較去掉 $(c_1, 1]$ 留下 $[0, c_1]$ ，而「 c 點在 $[0, c_1]$ 中所處的比例位置」與「 c_1 點在 $[0, 1]$ 中所處的比例位置」相等。

（取自世界著名的近代數學家——華羅庚 (1910-1985) 著《優選學》一書）