

張進通許世賢教育事務基金會 108 學年度 雲嘉南區 國中數學能力競試  
數學一試題

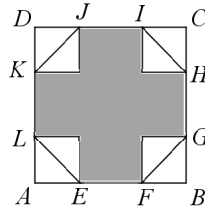
**注意：**請將答案填在答案卷上；若答案為分數，請化為最簡分數；若答案為根式，請化為最簡根式。

一、填充題：每題 5 分，共 90 分，答案請寫在答案卷上。

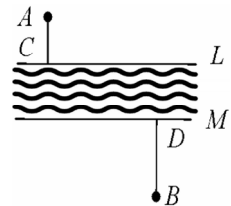
1. 用黑、白兩種顏色的正三角形地磚，依照如右圖的規律，拼成若干圖形。  
求第 10 個圖形需用到\_\_\_\_\_塊白色地磚。



2. 如右圖，將邊長為 2 的正方形  $ABCD$  的四個角往內摺，  
可摺出正八邊形  $EFGHIJKL$ ，求圖中陰影面積為\_\_\_\_\_。



3. 如右圖， $L$ 、 $M$  為兩條平行的河岸線，在  $L$ 、 $M$  上各取一點搭起橋梁，橋梁必須垂直兩條河岸線，橋梁長度為 33， $A$  到  $L$  距離為  $\overline{AC} = 10$ ， $B$  到  $M$  距離為  $\overline{BD} = 20$ ，且  $\overline{AB} = 65$ ，求從  $A$  走到  $B$ （需經橋梁）的最短距離為\_\_\_\_\_。

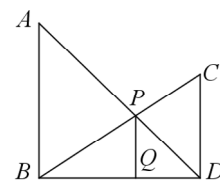


4. 設  $n$  為正整數，已知  $n$  與它的各位數字之和為 2019，求  $n$  的最小值為\_\_\_\_\_。

5. 嘉中的堂哥在一張紙片上寫下一串數列：1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...，總共寫了 108 項，嘉中發現這串數列就是有名的費波那契數列（費氏數列 Fibonacci Sequence），即前面兩項的和等於後面一項，例如：1+1=2，1+2=3，2+3=5，3+5=8，5+8=13。求這串數列中是偶數又是 3 的倍數者，共有\_\_\_\_\_項。

6. 設  $n$  為正整數， $n+6$  為 5 的倍數且  $n+5$  為 6 的倍數，求  $n+4$  除以 30 的餘數為\_\_\_\_\_。

7. 如右圖，嘉南平原上有兩座高塔，高度分別為  $\overline{AB} = 4$ 、 $\overline{CD} = 3$ 。現在分別從每一高塔的頂端向對面高塔的底面射出雷射光線，兩光線  $\overline{AD}$  與  $\overline{BC}$  在空中交於一點  $P$ 。求該交點距離地面的高度  $\overline{PQ} =$ \_\_\_\_\_。



8. 設  $x$ 、 $y$ 、 $z$  為正整數，且  $18 + \frac{1}{x + \frac{1}{2 + \frac{1}{y + \frac{1}{1 + \frac{1}{z}}}}} = \frac{2019}{108}$ ，求  $x + y + z =$ \_\_\_\_\_。

9. 解方程式  $2x^2 - 7x + 5 = |4x - 7|$ ，得  $x =$ \_\_\_\_\_。（兩解）

10. 已知  $n = 9 + 99 + 999 + 9999 + \cdots + \underbrace{999\cdots 9}_{99\text{個}9}$ ，求數字  $n$  含有\_\_\_\_\_個 1。（例如：123115 含有 3 個 1。）

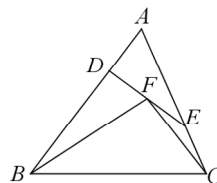
11. 設  $a$ 、 $b$ 、 $c$  為相異的正整數， $a < b < c$  且  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$ ，求  $a+b+c =$  \_\_\_\_\_。

12. 已知  $x = \frac{\sqrt{108}-6}{12}$ ，求  $(10x^4 - 4x^3 - 15x^2 + 11x - 3)^{108} =$  \_\_\_\_\_。

13. 設  $x$ 、 $y$  為整數，且  $\frac{20}{x} - \frac{19}{y} = 1$ ，求  $x$  的最大值為 \_\_\_\_\_。

14. 高斯符號  $[x]$  表示不大於  $x$  的最大整數，例如： $[2.5] = 2$ ， $[-3.6] = -4$ 。求  $[\sqrt{9 \times 108^2 - 5 \times 108 - 110}] =$  \_\_\_\_\_。

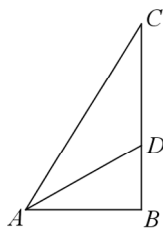
15. 如右圖， $\triangle ABC$  中， $D$  在  $\overline{AB}$  上，且  $\overline{AD}:\overline{DB} = 1:3$ ， $E$  在  $\overline{AC}$  上， $\overline{AE}:\overline{EC} = 2:1$ ， $F$  在  $\overline{DE}$  上，且  $\triangle ABC$  的面積為 10， $\triangle BCF$  的面積為 5，求  $\triangle BDF$  的面積為 \_\_\_\_\_。



16. 設  $108 = 2^{a_1} + 2^{a_2} + 2^{a_3} + \cdots + 2^{a_n}$ ，且  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  皆為正整數，求  $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$  的最小值為 \_\_\_\_\_。

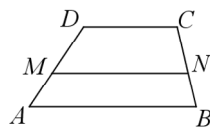
17. 設  $S_n$  為等差數列前  $n$  項之和，已知  $S_4 = 16$ ， $S_n = 100$ ， $S_{n-4} = 36$ ，求此等差數列的公差為 \_\_\_\_\_。

18. 如右圖， $\triangle ABC$  中， $\angle B = 90^\circ$ ， $\overline{AD}$  為  $\angle CAB$  的角平分線， $\overline{AB} = 5$ ， $\overline{AD} = 6$ ，求  $\overline{AC} =$  \_\_\_\_\_。



二、計算證明題：共 10 分，計算證明過程請寫在答案卷上。

1. 如右圖，梯形  $ABCD$  中， $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ，且  $M$ 、 $N$  分別在  $\overline{AD}$ 、 $\overline{BC}$  上，且梯形  $ABNM$  與梯形  $MNCD$  面積相同。已知  $\overline{AB} = 4$ ， $\overline{CD} = 3$ ，求  $\overline{MN}$  的長度為多少？（5 分）



2. 如右圖， $ABCPQ$  五邊形中， $\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{EF}} = 2$ ，已知  $\triangle PQA$  的面積為  $x$ ， $\triangle PQB$  的面積為  $y$ ， $\triangle PQC$  的面積為  $z$ ，且  $\triangle PQF$  的面積為  $\frac{ax+by+cz}{9}$ ，其中  $a$ 、 $b$ 、 $c$  皆為正整數，求  $a$ 、 $b$ 、 $c$  分別為多少？。（5 分）

