張進通許世賢教育文教基金會111學年度雲嘉南區國中數學能力競試

「數學二」試題

一、填充題：每題5分，共40分。請在答案卷上作答。

1. 將九宮格填入適當的數字使得每行、每列及對角線上的數字總和都相等，則正整數 a 的值為__________。

83		
		a
	3	

2. 有五位<u>分別居住在不同地方</u>的朋友正在討論他們或其家人的居處地。
   A：我住在 a 地，B 也住在 a 地，而 C 住在 b 地。
   B：我住在 c 地，E 也住在 c 地，而 C 確實住在 b 地。
   C：我不住在 b 地，A 不住在 d 地，D 還是住在 e 地。
   D：我爸爸住在 a 地，我媽媽住在 b 地，但我住在 f 地。
   E：A 住在 a 地，B 一樣住在 a 地，而我住在 f 地。
   其中他們每個人的三句敘述中，都只有兩句是對的，一句是錯的，請問 A,B,C,D,E 各自住在哪個市？__________。
   (請依序用數對表示)

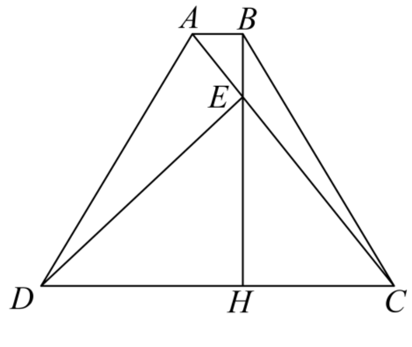
3. 已知 20+20+20+10+10=80，我們試著用英文字母表示成：
   其中 E、G、H、I、N、T、W、Y 代表不同於 0~9 的正整數，
   則 $EIGHTY$ =__________。(6位數字)

$$\begin{array}{r} TWENTY \\ +\ TWENTY \\ +\ TWENTY \\ +\ TEN \\ +\ TEN \\ \hline EIGHTY \end{array}$$

4. 若三個互質的正整數 a,b,c 滿足 $a^2+b^2=c^2$，稱 (a,b,c) 為畢氏三元組數(a,b,c 順序可對調)。經過一些乘法公式可找出畢氏三元組數的特殊關係：
   由 $(m^2+n^2)^2=(m^2-n^2)^2+(2mn)^2$ 得知 $(m^2-n^2,2mn,m^2+n^2)$ 為畢氏三元組數，其中 m,n 為正整數，例：$(8,15,17)$。
   由 $(n+1)^2=n^2+(2n+1)$，令 $2n+1=k^2 \Rightarrow n=\dfrac{k^2-1}{2}$ 帶入式子得到 $\left(\dfrac{k^2+1}{2}\right)^2=\left(\dfrac{k^2-1}{2}\right)^2+k^2$。例：$(5,12,13)$。
   今有一直角三角形邊長均為正整數且周長為90，若其中兩邊為連續整數，試問三角形內切圓面積為__________。

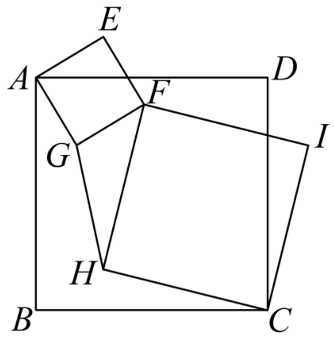
5. 若 a,b,c 為 ΔABC 的三邊長，且 a,b,c 為方程式 $x^3-20x^2+131x-280=0$ 的三根，則 ΔABC 的面積為__________。

6. 如右圖，等腰梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}\,//\,\overline{DC}$，$\overline{AB}=3$，$\overline{DC}=21$，作 $\overline{BH}\perp\overline{CD}$ 於 H 點，$\overline{AC}$ 交 $\overline{BH}$ 於 E 點，連 $\overline{DE}$。若 $\angle AED$ 為直角，且 $n<\overline{BC}<n+1$，則正整數 n=__________。



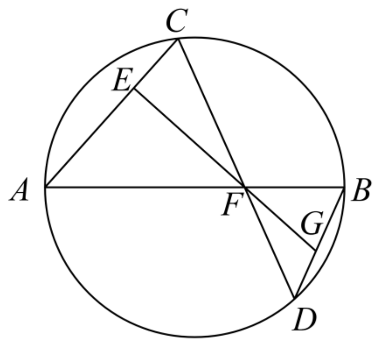
7. 如右圖，$ABCD$、$AEFG$、$FICH$ 皆為正方形，其中 $\overline{AB}=3$，$\overline{AE}=1$，

延伸對角線 $\overline{EG}$ 和 $\overline{IH}$ 皆會通過 B 點，求 ΔFGH 的面積=________。



8. 右圖為一圓，$\overline{AB}$ 為直徑，$\overline{CD}$ 為一弦，$\overline{CD}$ 交 $\overline{AB}$ 於 F，$\overline{AB}=18$，$\overline{AC}=\overline{AF}=12$，

$\angle AEF$ 為直角，延伸 $\overline{EF}$ 交 $\overline{BD}$ 於 G，求 $\overline{EF}:\overline{FG}$=________。



二、計算證明題：四大題，共 60 分。過程及答案請寫在答案卷上。

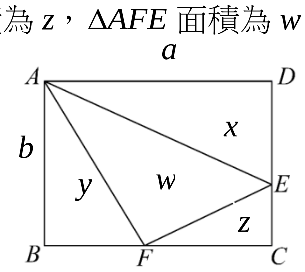
1. 設 $x^2-x-1=0$ 的兩根為 α,β，令 $P_n=\alpha^n+\beta^n, n=1,2,3,\cdots$，回答以下問題。

(1) 試求 $\alpha^2+\beta^2$ 之值。(5 分)

(2) 試證：$P_n+P_{n+1}=P_{n+2}$。(5 分)

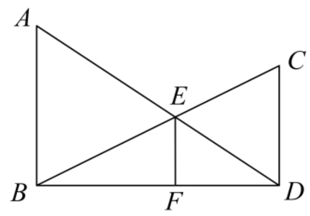
(3) 求 P_7 的值。(5 分)

2. 如右圖，矩形 $ABCD$ 中，$\overline{AD}=a$，$\overline{AB}=b$，ΔADE 面積為 x，ΔABF 面積為 y，ΔFCE 面積為 z，ΔAFE 面積為 w。試將 w 一般化利用 x,y,z 表示。(10 分)



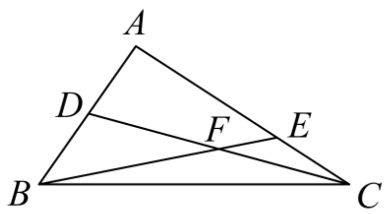
3. (1)如右圖，$\overline{AB}$、$\overline{EF}$、$\overline{CD}$ 皆與 $\overline{BD}$ 垂直，A、E、D 三點共線，C、E、B 三點共線。

試證：$\dfrac{1}{\overline{AB}}+\dfrac{1}{\overline{CD}}=\dfrac{1}{\overline{EF}}$。(5 分)

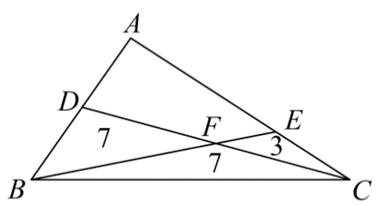


(2)如右圖，ΔABC 中，D、E 分別在 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 上，$\overline{BE}$ 與 $\overline{CD}$ 交於 F，其中四邊形 $ADFE$ 面積為 a，ΔBDF 面積為 b，ΔBCF 面積為 c，ΔCEF 面積為 d。

請利用(1)的結果，證明：$\dfrac{1}{a+b+c+d}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+d}$。(5 分)



(3)若給定上圖 ΔBDF 面積為 7，ΔBCF 面積為 7，ΔCEF 面積為 3，
試利用(2)的結果計算四邊形 $ADFE$ 面積。(4 分)



(4)承上題敘述，請你再用另外兩種不同方法求出四邊形 $ADFE$ 面積。(一種做法得 3 分，共 6 分)

4. 閱讀完【甲】、【乙】兩文，試回答以下問題。

【甲】

古希臘哲學家芝諾提出許多悖論，其中有一則稱為”阿基里斯悖論”內容寫道：「較慢者絕不會被較快者追趕過去。因為追趕者必須經過在前頭跑者經過的每一點。所以較慢者一定在較快者的某一段距離之前。」

他假設讓一隻烏龜與阿基里斯賽跑，阿基里斯的速度是烏龜的 10 倍，比賽開始前先讓烏龜領先阿基里斯 1000 公尺。比賽開始後，阿基里斯跑了 1000 公尺到烏龜起跑的位置，這段時間烏龜也跑了 100 公尺；接著阿基里斯再跑了 100 公尺，而烏龜又跑了 10 公尺；阿基里斯再跑 10 公尺，此時仍然落後烏龜 1 公尺。依照此分階段競賽的觀點，芝諾認為阿基里斯能夠繼續逼近烏龜，但決不可能追上它。不過事實上，利用極限的觀點，無限分割時間與空間，逼近的過程與其極限等價，阿基里斯是能夠追上烏龜的。

我們知道一個等比數列前 n 項的和 $S_n=\frac{a_1\left(1-r^n\right)}{1-r}$，其中 a_1 為首項，r 為公比。

若 $|r|<1$ 且 n 趨近於無限大時，r^n 會很趨近於 0 但不會等於 0。不過在極限的觀點，就像阿基里斯與烏龜距離一樣，我們會將 r^n 以 0 去計算，因此總和公式即為 $S_n=\frac{a_1}{1-r}$。讓我們試著驗證這件事。

【乙】

將一筆錢存入金融機構，我們會與金融機構約定好利率與時間周期來計算利息，若每一期產生的利息會納入下一期的本金去計算利息，不斷以利滾利的方式我們稱為複利。例如存 10000 在銀行，約定每年以 10%利率計算利息一次，一年後本利和為 $10000\times(1+10\%)=11000$，兩年後本利和為 $10000\times(1+10\%)^2=12100$，以此類推，$n$ 年後本利和 $10000\times(1+10\%)^n$。

若更改計息的頻率，我們觀察到利息的變化，以下為了方便解說，假設將本金 1 元存進一間年利率為 100%的銀行：

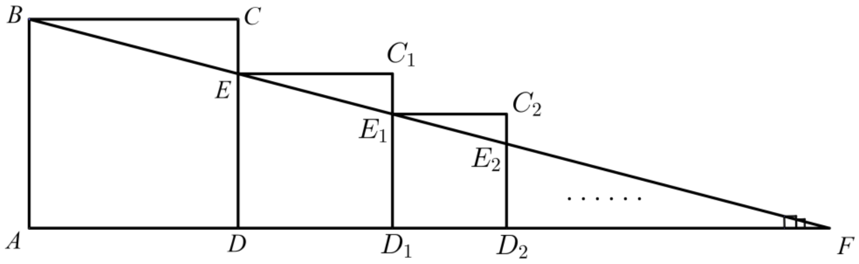
期數(一年計息頻率)	本利和
1 期(一年計息一次)	$1\times(1+1)^1=2$
2 期(半年計息一次)	$1\times\left(1+\frac{1}{2}\right)^2=2.250$
12 期(一個月計息一次)	$1\times\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12}\approx 2.613$
365 期(一天計息一次)	$1\times\left(1+\frac{1}{365}\right)^{365}\approx 2.715$
1000 期	$1\times\left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000}\approx 2.717$
10000 期	$1\times\left(1+\frac{1}{10000}\right)^{10000}\approx 2.718$

我們發現，將 100%的年利率分成愈多期數去計算利息，本利和就會愈多，那是否會變成無限大呢？

事實上，如果計息的頻率愈高，即 n 的值無限增加時，$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 只會愈來愈接近一個數：2.71828⋯。也就是說，不論本金多少，一年後的本利和絕對不會多於 2.71828⋯倍。這個美麗的數字也被數學家歐拉稱為自然常數 e。

而我們也可以將 e 表示成無窮級數 $e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}\cdots$ (其中 $n!$ 為 n 階乘，$n!=1\times2\times3\times\cdots\times n$)。

如下圖，正方形 $ABCD$ 邊長為 1，$\overline{CD}$ 上取一點 E 使得 $\overline{ED}=r$，延長 $\overline{BE}$ 與 $\overline{AD}$ 相交於 F，以 $\overline{ED}$ 為邊長做正方形 DEC_1D_1，$\overline{BF}$ 交 $\overline{C_1D_1}$ 於 E_1，再以 $\overline{E_1D_1}$ 為邊長做正方形 $D_1E_1C_2D_2$，以此類推，其中 $\overline{E_nD_n}=r_n$，$n=1,2,3,\ldots$。



試證：

(1) $r_1=r^2$。 (5 分)

(2) 試利用 $\overline{AF}$ 證明 $1+r+r^2+r^3+\cdots=\dfrac{1}{1-r}$。 (5 分)

(3) 請參考(2)的結果說明 $e=1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{4!}\cdots<3$。 (5 分)