

國立嘉義高中 104 學年度科學班 第二階段 數學科 實驗實作試題卷

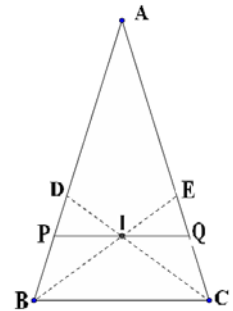
一、填充題：（每格 5 分）

1. 設 a, b 為正整數。若 a 除以 b 的餘數是 42， b 除以 42 的餘數為 12，則 a 與 b 的最大公因數為_____。

2. 直角座標平面上，方程式 $x^2y^2 + x^2 + y^2 + 10xy + 16 = 0$ 的圖形是兩個點，則此兩點的坐標為_____。

3. 方程式 $\frac{6}{5 + \frac{4}{3 - \frac{2}{x^2 - 3x}}} = 1$ 之解為 $x =$ _____。

4. 如圖，點 I 是等腰 $\triangle ABC$ 的內心，若 $\overline{AB} = \overline{AC} = 5$ ， $\overline{BC} = 3$ ， \overline{PQ} 過點 I 且平行 \overline{BC} ，則 $\overline{PQ} =$ _____。



5. 設 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ， $a \neq 0$ 。若 $f(x)$ 除以 $(x+1)^2$ 餘 1，又 $3 - f(x)$ 被 $x+2$ 整除且商為一次式的完全平方式，則 $a + b + c + d =$ _____。

6. 將紅，白，黑，黃色的色球各一顆，放入 4×4 的方格板中，每個方格至多放一球，每球均需在不同列且不同行，（方格板不可轉動）。如圖所示，為其中一種放法。若依此規則擺放，共有_____種不同的擺放方法。

	(r)		
(w)			
			(y)
		(b)	

7. 設 k 為自然數。已知 $3 \times 7 \times (25+4) \times (625+16) \times \dots \times (5^{2^k} + 2^{2^k}) \times \dots \times (5^{1024} + 2^{1024}) = 5^n - 2^n$ ，則自然數 $n =$ _____。

8. 我們依下列規則對數對 (i, j) ($i = 1, 2, \dots$; $j = 1, 2, \dots$) 進行編號： $(1, 1) = 1$; $(1, 2) = 2$ 、 $(2, 1) = 3$; $(1, 3) = 4$ 、 $(2, 2) = 5$ 、 $(3, 1) = 6$; $(1, 4) = 7$ 、 $(2, 3) = 8$ 、 $(3, 2) = 9$ 、 $(4, 1) = 10$; \dots ，其中 $(i, j) = k$ 表示數對 (i, j) 的編號為 k 。試問：

(1) 編號為 1000 的數對為_____；

(2) 若數對 (n, n) 的編號為 r ，則 $r =$ _____ (以 n 表示)。

9. 設 m 為整數。若 $mx^2 + 16x + m + 2 = 0$ 的所有根中，至少有一個為整數，則 m 可能的值有_____個。

10. 設函數 $f(x)$ 滿足 $f(x+1) + f(x) = 3x + 101$ ，則 $f(2015) - f(1) =$ _____。

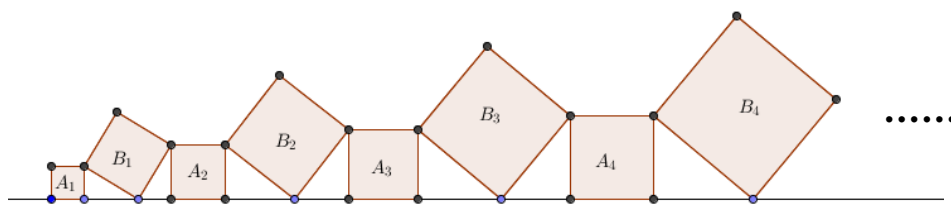
11. 令 $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$ ，例如： $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$ 。若已知

$$1 + \frac{2!}{2^2} + \frac{2 \times 3!}{2^3} + \dots + \frac{(k-1) \times k!}{2^k} + \dots + \frac{99 \times 100!}{2^{100}} = \frac{n!}{2^m}，則自然數數對(n, m) = \text{_____}。$$

12. 設 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2015}$ 是方程式 $x^{2015} + 2x + 1 = 0$ 的 2015 個根，則

$$(a_1^{2015} + a_2^{2015} + a_3^{2015} + \dots + a_{2015}^{2015}) - (a_1^{2014} + a_2^{2014} + a_3^{2014} + \dots + a_{2015}^{2014}) = \text{_____}。$$

13. 如下圖所示， $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots$ 和 $B_1, B_2, B_3, B_4, \dots$ 均為正方形。若 $B_1, B_2, B_3, B_4, \dots$ 的面積分別為 $1, 2, 3, 4, \dots$ 平方單位(即正方形 B_k 的面積為 k 平方單位)，且正方形 A_k 的面積為 S_k 平方單位($k = 1, 2, 3, 4, \dots$)，則 $S_1 + 2S_2 + 2S_3 + 2S_4 + \dots + 2S_8 + 2S_9 + S_{10} =$ _____。



14. 假設 $f(n)$ 代表正整數 n 的各位數字的乘積，例如： $f(5) = 5$ 、 $f(13) = 1 \times 3 = 3$ 、 $f(290) = 2 \times 9 \times 0 = 0$ 。則 $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(1000) =$ _____。

15. 設 k 為實數。若二次函數 $y = x^2 + 3x + 2$ 的圖形與直線 $y = x + k$ 不相交，則 k 的範圍為_____。

二、證明題：(共 20 分)

1. (1) 設實數 z, c 滿足 $z \geq c \geq 1$ ，試證： $z + \frac{1}{z} \geq c + \frac{1}{c}$ 。(4 分)

(2) 對於任意正數 x ，試證明： $x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x + \frac{1}{x}} \geq \frac{5}{2}$ 。(6 分)

2. 若數列每一項的倒數所成的數列是等差數列，則稱此數列為調和數列。設數列 $\langle a_n \rangle$ 為調和數列，試證： $a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_4 + \dots + a_{n-1} a_n = (n-1) a_1 a_n$ 。(10 分)