

數學科實驗實作 參考解答

1.(1)商式 = $\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{4}n + \frac{1}{8}$ ，餘式 = $\frac{87}{8}$

(2)由(1)知 $n^3 + 11 = (2n + 1)\left(\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{4}n + \frac{1}{8}\right) + \frac{87}{8}$

$$8(n^3 + 11) = (2n + 1)(4n^2 - 2n + 1) + 87$$

已知 $2n + 1$ 可整除 $n^3 + 11$

故 $2n + 1$ 亦可整除 $8(n^3 + 11) - (2n + 1)(4n^2 - 2n + 1) = 87 = 3 \times 29$

$2n + 1 = \pm 1$ 或 ± 3 或 ± 29 或 ± 87

n 的所有可能值為 $0, -1, 1, -2, 14, -15, 43, -44$

2.(1)圖形如右。

因為三圓半徑相同，所以 $\overline{KQ_1} = \overline{KQ_2} = \overline{KQ_3}$

$\Rightarrow K$ 點為 $\triangle Q_1Q_2Q_3$ 的外心

(2)設 R_1, R_3 為圓 Q_1 與圓 Q_3 在 \overline{AC} 邊上的切點

S_2, S_3 為圓 Q_2 與圓 Q_3 在 \overline{BC} 邊上的切點

T_1, T_2 為圓 Q_1 與圓 Q_2 在 \overline{AB} 邊上的切點

因為三圓半徑相同，所以 $\overline{Q_1R_1} = \overline{Q_3R_3}$ ， $\overline{Q_2S_2} = \overline{Q_3S_3}$ ， $\overline{Q_2T_2} = \overline{Q_1T_1}$

$\Rightarrow \overline{Q_1Q_3} \parallel \overline{AC}$ ， $\overline{Q_2Q_3} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{Q_1Q_2} \parallel \overline{AB} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle Q_1Q_2Q_3$

因 $\angle Q_1AR_1 = \angle Q_1AT_1 \Rightarrow \overrightarrow{AQ_1}$ 為 $\angle BAC$ 之角平分線

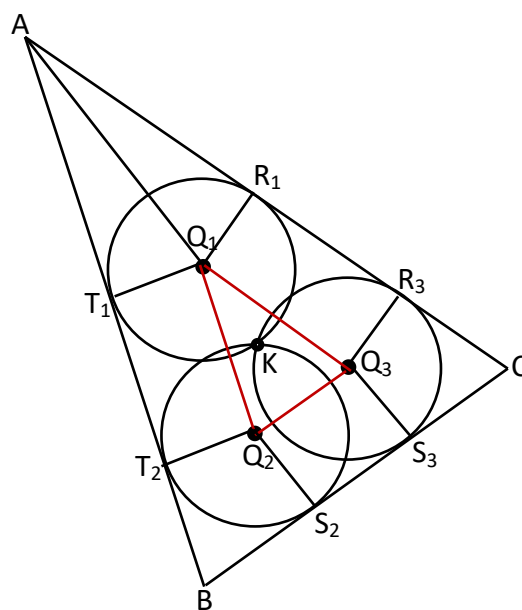
又 $\overline{Q_1Q_3} \parallel \overline{AC}$ ， $\overline{Q_1Q_2} \parallel \overline{AB}$ ， $\overrightarrow{AQ_1}$ 亦平分 $\angle Q_3Q_1Q_2$

同理 $\overrightarrow{CQ_3}$ 為 $\angle ACB$ 之角平分線且平分 $\angle Q_1Q_3Q_2$

$\overrightarrow{BQ_2}$ 為 $\angle ABC$ 之角平分線且平分 $\angle Q_1Q_2Q_3$

由三角形內心性質， $\overrightarrow{AQ_1}, \overrightarrow{BQ_2}, \overrightarrow{CQ_3}$ 三線共點 I ，此 I 點為 $\triangle ABC$ 的內心，亦為 $\triangle Q_1Q_2Q_3$ 的內心

所以 $\triangle ABC$ 的內心與 $\triangle Q_1Q_2Q_3$ 的內心重合



(3)設 $\triangle ABC$ 的外心為 W

因為 $\triangle ABC$ 與 $\triangle Q_1Q_2Q_3$ 對應邊互相平行

所以 $\triangle ABC$ 之內心與外心的連線 與 $\triangle Q_1Q_2Q_3$ 之內心與外心的連線也平行 (註 1)

即 $\overrightarrow{IW} \parallel \overrightarrow{IK}$

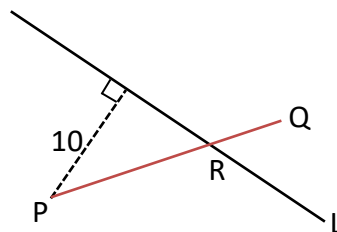
但兩線有共同點 I ，故兩線重合：即 I, K, W 共線

(註 1：上述性質可由平行線截比例線段方法證明)

3.(1)假設 P, Q 在 L 的兩側，則 \overline{PQ} 與 L 相交，設此交點為 R

則 $\overline{PR} < \overline{PQ} = 6 < 10 = d(P, L)$ 矛盾

故 P, Q 在 L 的同側



(2) 設直線 \overleftrightarrow{FG} 為 L

因為 $\triangle EFG$ 為正三角形且邊長為 5

$$\text{所以 } d(E, L) = \frac{5}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{2}\sqrt{75}$$

$$\text{而 } \overline{ET} \leq \overline{AT} = 3\sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{72}$$

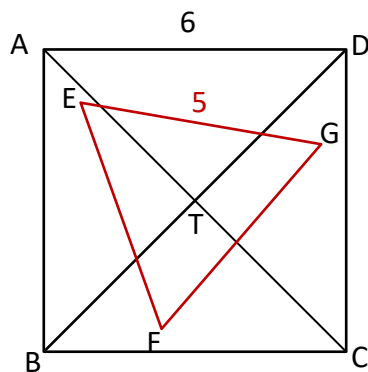
比較 \overline{ET} 與 $d(E, L)$ 知 $\overline{ET} < d(E, L)$

由(1)小題知， E, T 在 \overleftrightarrow{FG} 的同一側 ——①

同理可知 F, T 在 \overleftrightarrow{EG} 的同一側 ——②

G, T 在 \overleftrightarrow{EF} 的同一側 ——③

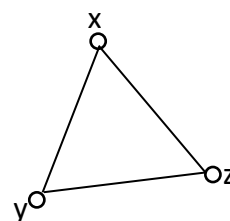
由①②③知， T 點位在 $\triangle EFG$ 內



$$4.(1) (4, -6, 5) \rightarrow (-2, 6, -1) \rightarrow (2, 4, -3) \rightarrow (-1, 1, 3) \rightarrow (1, 0, 2)$$

$$\text{或 } (4, -6, 5) \rightarrow (-2, 6, -1) \rightarrow (-3, 5, 1) \rightarrow (3, 2, -2) \rightarrow (1, 0, 2)$$

調整過程中，三整數的和均不變



(2) 會停止。原因如下：

$$x, y, z \in \mathbb{Z} \text{ 且 } x + y + z > 0$$

設 $y < 0$ ，則調整後的三數 $x + y, -y, z + y$

① 此三數和為 $(x + y) + (-y) + (z + y) = x + y + z$ 與調整前的三數和相同

$$\begin{aligned} \text{② 此三數平方和 } & (x + y)^2 + (-y)^2 + (z + y)^2 \\ &= x^2 + 2xy + y^2 + y^2 + z^2 + 2zy + y^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 + 2y(x + y + z) \\ &< x^2 + y^2 + z^2 \text{ (=原三數平方和)} \end{aligned}$$

調整過程中三數的平方和將越來越小，因為三數平方和為正整數，所以有限次調整後必然會停止