

國立嘉義高中 106 學年度科學班科學能力檢定—數學成就測驗試題

◎填充題(每格 5 分，共 100 分)

1. 已知 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ ，求級數： $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 23^2 + 25^2 =$ _____。
2. 設 x, y 為自然數，函數 $f(x, y)$ 滿足兩條件：(1) $f(x, y) = f(x+2, y-1)$ (2) $f(x, 1) = x$
求 $f(2019, 98) =$ _____
3. 已知數列 $\langle a_n \rangle$ ，定義 $a_1 = 1$ ， $a_{n+1} = \frac{3a_n - 1}{4a_n - 1}$ ，求 $a_{100} =$ _____
4. 將數字從 1 寫到 2017 得到 $a = 12345678910111213\dots\dots201520162017$ ， a 除以 11 的餘數為_____。
5. 有一個底半徑為 12 公分的圓柱體掃地機器人，他會把所經過的區域利用吸塵器原理自動打掃乾淨，現在此機器人要打掃一間地面為直角三角形的房間，若此房間的三邊長分別為 3、4、5 公尺，則它打掃不到的區域(即它無法到達的區域)面積為_____ 平方公分。
6. 一個房間有 100 盞燈，編號為 1 至 100 全部熄著，今有三個人依序進入此房間，第一人進入時，將偶數號開關一按，偶數號燈全由暗轉亮；第二人進入時，將 3 的倍數的開關一按，則 3 倍數號燈亮者變暗，暗者變亮；第三人進入時，將 5 的倍數的開關一按，則 5 倍數號燈亮者變暗，暗者變亮。試問 3 人進屋後，有幾盞燈是亮著的？
7. 設實數 a, b, x, y 滿足 $a + b = 8$ ， $ax + by = 9$ ， $ax^2 + by^2 = 33$ ， $ax^3 + by^3 = 60$ ，求 $ax^4 + by^4$ 的值_____
8. 求值 $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{2}{15} + \frac{2}{35} + \frac{4}{77} + \frac{2}{143} + \frac{4}{221} + \frac{2}{323} =$ _____
9. 已知 x, y, z 為整數，且 $xyz = 24$ ，則整數序對 (x, y, z) 有幾組解？
10. 若 x 的二次方程式 $x^2 + 4kx + 5k^2 - k - 2 = 0$ 有兩實根 α, β ， $(\alpha+1)(\beta+1)$ 的最大值為 M ，最小值為 m ，則數對 $(M, m) =$ _____
11. 以長分別為 1, 3, 3, 5, 5, 5, 7, 7, 10, 10(單位)的十條棉繩為邊，可做出_____個不全等的三角形。

12. 定義： $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$ 。

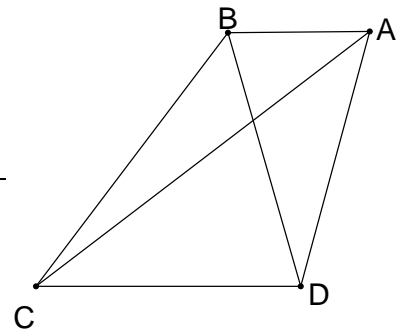
$N = 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + 2017 \cdot 2017!$ ，則 N 的末位有_____個連續的 9。

13. 有一數列 $\{a_n\}$ 滿足 $a_1 = 0$ ， $a_2 = 3$ ， $\sqrt{a_n+1} + \sqrt{a_{n+2}+1} = 2\sqrt{a_{n+1}+1}$ ($n \geq 1$)，則 $a_{100} =$ _____。

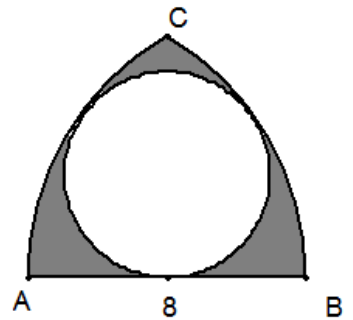
14. 單位圓(半徑為 1 的圓)的外切正五邊形與內接正五邊形的邊長比值為_____。

15. 設 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$ ，其中 a_0, a_1, \dots, a_n 皆為小於 4 的正整數。已知 $f(4) = 2017$ ，則 $f(1) =$ _____。

16. 如圖，梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ， $\overline{DA} = \overline{DB} = \overline{DC} = 8$ ， $\overline{BC} = 9$ ，則 $\overline{AC} =$ _____

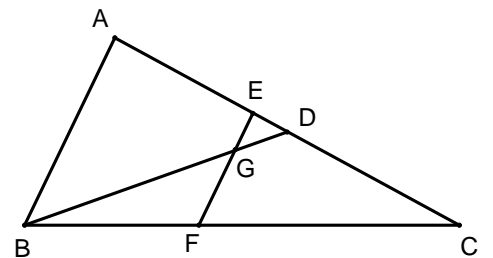


17. 如圖，弧 \overline{AC} 、 \overline{BC} 是分別以 B 、 A 為圓心， \overline{AB} 為半徑所畫之弧。又有一圓同時與 \overline{AB} 、 \overline{AC} 、 \overline{BC} 相切，若 $\overline{AB} = 8$ ，則圖中之陰影面積為_____。



18. 方程式 $|x^2 - 3x + 2| + |x^2 + 2x - 3| = 11$ 的所有實根為_____。

19. 如圖， $\square ABC$ 中 \overline{BD} 為中線， E 在 \overline{AD} 上，過 E 做 \overline{EF} 平行 \overline{AB} ，並交 \overline{BC} 於 F ，交 \overline{BD} 於 G 。若 $\overline{EG} = 2$ ， $\overline{FG} = 3$ ，則 $\overline{AB} =$ _____。



20. 設 a 為正實數，若直線 $3x + y = a$ 及 $x + 2y = 14$ 與 x 軸、 y 軸圍成的區域面積為 $\frac{127}{10}$ ，則 $a =$ _____。