

國立嘉義高級中學 110學年度科學班甄選入學科學能力檢定 數學科能力檢定試題

一、填充題 (每題5分, 共85分)

1. 在數線上, 已知兩點 $P(10^{-16})$ 、 $Q(10^{-15})$ , 今將 $\overline{PQ}$ 分成100等分, 由左而右得到99個等分點 $A_1$ 、 $A_2$ 、 $A_3$ 、 $\dots$ 、 $A_{99}$ 。若 $\overline{A_{31}A_{55}} = a \times 10^n$ , 其中 $1 \leq a < 10$ ,  $n$ 為整數, 則數對 $(a,n) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
2. 已知 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 三數均不為0且 $\frac{2b+2c}{a} = \frac{2c+2a}{b} = \frac{2a+2b}{c}$ 。若 $a+b+c=3$ , 則 $\frac{2b+2c}{a}$ 的值 $= \underline{\hspace{2cm}}$ 。
3. 有一瓶可樂連瓶子重1000公克, 若喝掉這瓶可樂的一部分後, 剩下的可樂連瓶子共重400公克, 假設喝掉的這部分佔全部可樂(不含瓶子)的比例為 $x$ , 且 $\frac{3}{4} < x < \frac{5}{6}$ 。如果瓶子的重量為 $y$ 公克且 $a < y < b$ , 則數對 $(a,b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
4. 一個「訊息」是由一串8個數字排列組成, 且每位數字都只能是0或1, 例如10010000與01011000就是兩個不同的訊息。兩個訊息的「距離」定義為此兩組數字串相對應位置中, 數字不同的位置數。例如, 數字串10010000與01011000在第1、2及5三個位置不同, 所以訊息10010000與01011000的距離為3。根據上述定義, 若有一訊息與訊息11011001、11001011的距離皆為 $a$ , 則正整數 $a$ 的值共有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 個。
5. 若平行四邊形 $ABCD$ 的面積為4,  $M$ 、 $N$ 分別是 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CD}$ 的中點, 且 $G$ 為 $\triangle AMN$ 的重心, 則 $\triangle GMN$ 的面積 $= \underline{\hspace{2cm}}$ 。
6. 若 $\sqrt{13^2 \times 15^2 \times 17^2 + 19000} = a+b$ , 其中 $a$ 為正整數,  $0 < b < 1$ , 則 $a$ 的值 $= \underline{\hspace{2cm}}$ 。
7. 若20個相異的正整數之算術平均數為14, 且這20個數中第三大的數是 $a$ , 則 $a$ 的最大值 $= \underline{\hspace{2cm}}$ 。
8. 已知 $\triangle ABC$ 為一等腰直角三角形,  $\angle ABC$ 為直角,  $D$ 為 $\overline{AC}$ 的中點,  $\overline{DE} \perp \overline{BC}$ ,  $E$ 在 $\overline{BC}$ 上,  $D_1$ 為 $\overline{AE}$ 和 $\overline{BD}$ 的交點,  $\overline{D_1E_1} \perp \overline{BC}$ ,  $E_1$ 在 $\overline{BC}$ 上,  $D_2$ 為 $\overline{AE_1}$ 和 $\overline{BD}$ 的交點。若 $\frac{\overline{BD_1}}{\overline{D_1D_2}} = r$ , 則正數 $r$ 的值 $= \underline{\hspace{2cm}}$ 。
9. 若 $a = \sqrt{8+\sqrt{63}} + \frac{1}{\sqrt{8+\sqrt{63}}}$  且  $\frac{n}{10} < a < \frac{n+1}{10}$ , 則正整數 $n$ 的值 $= \underline{\hspace{2cm}}$ 。
10. 三邊長皆為整數之三角形, 我們稱為 Diophantus 三角形。令  $a_n$  表示最大邊長為  $n$  的 Diophantus 三角形之個數, 例如,  $a_1=1$ ,  $a_2=2$ ,  $a_3=4$ , 試問  $a_{11} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

11. 已知數列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ 的每一項都是正數，它的任意相鄰3項 $a_k, a_{k+1}, a_{k+2}$ 都滿足 $\sqrt{a_k} - 2\sqrt{a_{k+1}} + \sqrt{a_{k+2}} = 0$ ，其中 $k$ 是正整數。若 $a_4=4$ ， $a_9=9$ ，則第15項 $a_{15} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
12. 試問： $2^{402} + 402$ 除以 $2^{201} + 2^{101} + 1$ 的餘數 $= \underline{\hspace{2cm}}$ 。
13. 已知等腰梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ， $\overline{AB}$ 比 $\overline{CD}$ 長。若 $\overline{BC} = 10$ ， $\overline{AC} = 11$ ，且 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 的長均為正整數，則 $\overline{AB}$ 的長 $= \underline{\hspace{2cm}}$ 。
14. 已知拋物線 $y = ax^2 + bx + c$ 的頂點坐標為 $(2, 3)$ 且其圖形與 $x$ 軸交於 $A, B$ 兩點，其中 $A, B$ 兩點都在 $y$ 軸右側。若 $a$ 是整數，則 $a$ 的最大值 $= \underline{\hspace{2cm}}$ 。
15. 在直角坐標平面上有5個點 $A(2, 0)$ 、 $B(6, 0)$ 、 $C(0, 3)$ 、 $D(0, 5)$ 、 $P(s, t)$ ，若 $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD}$ 有最小值，則此時數對 $(s, t) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
16. 在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB}$ 比 $\overline{AC}$ 長， $\overline{AH}$ 與 $\overline{BC}$ 垂直於 $H$ 點， $\angle BAC$ 的角平分線交 $\overline{BC}$ 於 $D$ 點， $M$ 是 $\overline{BC}$ 的中點。若 $\overline{AH} = 12$ ， $\overline{AD} = 13$ ， $\overline{AM} = 15$ ，則 $\overline{BC}$ 的長 $= \underline{\hspace{2cm}}$ 。
17. 在直角坐標平面上， $O(0, 0)$ ， $A(1, 2)$ ， $B(-4, 2)$ ，若 $\triangle OAB$ 的內切圓圓心為 $I$ ，且 $I$ 點的坐標為 $(s, t)$ ，則數對 $(s, t) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

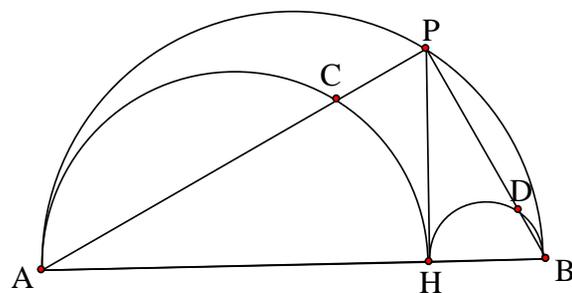
二、證明題 (第1題5分，第2題10分，共15分)

如右圖， $P$ 點在以 $\overline{AB}$ 為直徑的半圓上， $\overline{PH}$ 與 $\overline{AB}$ 垂直於 $H$ 點，以 $\overline{AH}$ 為

直徑的半圓 $C_1$ 與 $\overline{AP}$ 交於 $C$ 點，以 $\overline{BH}$ 為直徑的半圓 $C_2$ 與 $\overline{BP}$ 交於 $D$ 點。

試證：

- $P, C, H, D$ 四點共圓，即四邊形 $PCHD$ 為圓內接四邊形。 (5分)
- 直線 $CD$ 為兩半圓 $C_1$ 與 $C_2$ 的外公切線。 (10分)



~試題結束~