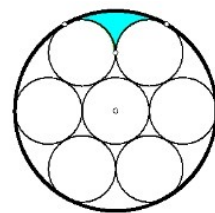


國立嘉義高中 111 學年度學術性向資賦優異【數理類】複選評量—數學能力評量試題

填充題：每題 5 分，共 20 題，共 100 分。

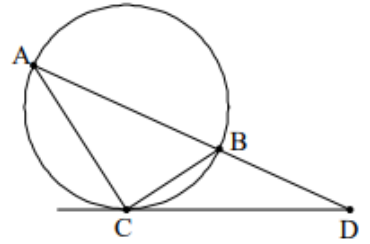
1. 已知  $2a^2 + b^2 - 4a - 6b = -11$ ，求  $a^b \times b^a =$  \_\_\_\_\_。
2. 設  $f(x) = 2x^5 - 11x^4 + 8x^3 + 9x^2 + ax + b$ ，其中  $a, b$  為整數，已知  $f(3 - \sqrt{2}) = 0$ ，求數對  $(a, b) =$  \_\_\_\_\_。
3. 設  $x$  是正整數，且  $\frac{4x+17}{3x-1}$  為正整數，則  $x$  的最大值為\_\_\_\_\_。
4. 若  $|2x^2 - 12x| + 4 - k = 0$  至少有三個實根，試求實數  $k$  的範圍為\_\_\_\_\_。
5. 將  $x^5 + x^4 + 1$  因式分解成整係數多項式乘積：\_\_\_\_\_ (若不能分解請作答“不能分解”)。
6. 求  $4x^2 - 4xy + 3y^2 - 8x + 8y = 35$  的所有正整數解  $(x, y) =$  \_\_\_\_\_。
7. 若相異實數  $a, b$  滿足  $a^2 - 5a + 1 = 0$ ， $b^2 - 5b + 1 = 0$ ，試求  $\frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} =$  \_\_\_\_\_。
8. 如圖，半徑為 6 的大圓內部正好放置七個大小都相等的小圓，彼此相切，則陰影部份的面積為\_\_\_\_\_。
9. 假設  $8^{2022} = x^y$ ，其中  $x, y$  皆為正整數，則  $x$  所有的值可能為\_\_\_\_\_個。



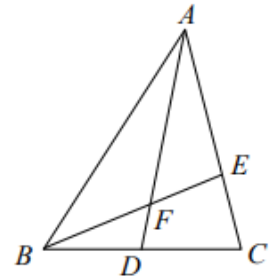
10. 求  $(1+x)(1+3x^2)(1+5x^3)(1+7x^4)(1+9x^5)(1+11x^6)(1+13x^7)(1+15x^8)$  展開式中  $x^8$  項的係數為\_\_\_\_\_。
11. 已知正整數  $n$  可以表示成任意二個連續正整數之和，也可以表示成任意五個連續正整數之和，試問 1~2022 滿足此條件的  $n$  值共有\_\_\_\_\_個。
12. 有若干個正整數的算術平均數為 15，今加入兩個相同的正整數  $n$  後，其算術平均數變為 20，試問  $n$  的最小值為\_\_\_\_\_。
13. 設  $a = \frac{1}{1} + \frac{2^2}{3} + \frac{3^2}{5} + \dots + \frac{1011^2}{2021}$ ， $b = \frac{1^2}{3} + \frac{2^2}{5} + \frac{3^2}{7} + \dots + \frac{1011^2}{2023}$ ，已知  $n < a - b < n + 1$ ，其中  $n$  為整數， $n =$ \_\_\_\_\_。
14. 阿義跟著太太帶著寵物小黑去散步，但他們兩位都想自己牽著小黑，最後決定在可憐的小黑脖子上繫上兩條 2 公尺長的牽繩，兩人各拉著繩子的一邊，假設散步的過程中阿義和太太彼此距離恆為 2 公尺，則每一瞬間小黑能活動的範圍為\_\_\_\_\_平方公尺。
15. 設  $S_n$  為等差數列前  $n$  項之和( $n > 8$ )，若  $S_8 = 48$ ， $S_n = 220$ ， $S_{n-8} = 92$ ，求  $n =$ \_\_\_\_\_。
16. 三兄弟在某一次選舉前討論彼此的想法：  
 大哥：如果二弟支持一號，我就支持二號；如果二弟支持三號，我就支持一號。另一方面，如果三弟支持二號，我就支持三號。  
 二弟：如果大哥支持三號，我就不支持二號；如果三弟支持一號，我就支持二號。  
 三弟：如果大哥支持二號，我就支持二號。  
 選舉完發現他們皆支持不同的候選人，請問他們各支持幾號？\_\_\_\_\_。

17. 某一日，嘉義高中校長前往學校的途中發現一群學生正在路邊撿菸蒂，校長內心感動不已，想要給這群學生獎勵，於是他登記了 98 位學生的學號姓名。後來得知這 98 位學生至多被記到嘉獎、小功、大功其中一種獎勵，又被記嘉獎的人數等於被記小功人數的 2 倍加上被記大功人數的  $\frac{4}{3}$  倍；被記小功的人數減 4 等於被記大功人數的 2 倍，試問被記大功的人數最多為\_\_\_\_\_人。

18. 右圖中， $A$ 、 $B$ 、 $C$  是圓上三點，已知  $\overline{AB} = 13$ ,  $\overline{BC} = 5$ ,  $\overline{AC} = 12$ 。以  $C$  為切點作圓的切線，並與直線  $\overline{AB}$  交於  $D$  點，則  $\overline{BD} =$ \_\_\_\_\_。



19. 如圖， $\triangle ABC$  面積為 56 平方單位，點  $D$  為  $\overline{BC}$  的中點，點  $E$  在  $\overline{AC}$  上且  $\overline{AE} : \overline{EC} = 3 : 1$ ，設  $\overline{AD}$  與  $\overline{BE}$  交於點  $F$ ，則四邊形  $CDFE$  的面積為\_\_\_\_\_平方單位。



20. 設  $\angle C = 90^\circ$ ， $\overline{AC}$  平分  $\angle BAD$  且交  $\overline{BD}$  於  $E$ ， $\overline{AC} = 20$ ， $3\overline{AB} = 5\overline{AD}$ ，試求  $\overline{AE} - \overline{CE} =$ \_\_\_\_\_。

