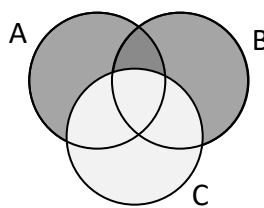


嘉義縣市 111 學年度【旭日東昇盃】高中數學競賽--高二組團體賽

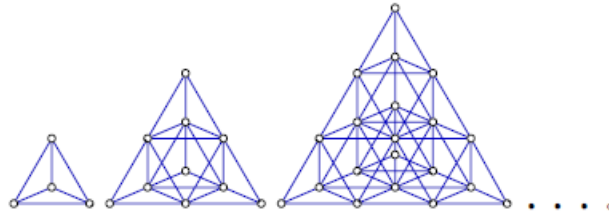
- 試求  $\frac{2022}{111}$  小數點後第111位與第2022位數字之和為\_\_\_\_\_
- 教室內共有5列4行共20個坐位，現從20個坐位中隨機取兩個位置，試求這兩個位置不在同一行、也不在同一列的機率是\_\_\_\_\_(請化成最簡分數)
- 四個人一起猜拳，每個人都從剪刀、石頭、布裡面隨機出一個。若只猜一次，試求贏的人數的期望值是\_\_\_\_\_
- 一家庭中有父母兄妹共四人，有一天發現爺爺留下的花瓶被家裡的某人打破了，這時候父親說：『不是女生打破的。』  
母親說：『是妹妹打破的。』  
哥哥說：『是妹妹跟我其中一個打破的。』  
妹妹說：『不是我打破的。』  
(1) 若四人中恰有一人說謊，則說謊的人是\_\_\_\_\_，打破花瓶的是\_\_\_\_\_  
(2) 若四人中恰有一人說實話，則說實話的人是\_\_\_\_\_，打破花瓶的是\_\_\_\_\_

- 右圖是三個集合 $A, B, C$ 的文氏圖，令 $n(X)$ 代表集合 $X$ 內的元素個數，  
(1) 試利用 $n(A), n(B), n(C), n(A \cap B), n(B \cap C), n(A \cap C), n(A \cap B \cap C)$ 來表示右圖中的陰影區域\_\_\_\_\_  
(2) 在不大於 $n$ 的正整數中， $k$ 的倍數個數可用 $n$ 除以 $k$ 再捨去小數點後數字來計算，試問在 $1, 2, \dots, 111$ 的正整數中，有\_\_\_\_\_個數字是3或4的倍數，但不是5的倍數。



- 有一個在1000~9999之間的四位數 $abcd$ ，其中 $a, b, c, d$ 為相異整數，若 $abcd$ 的九倍仍然是一個四位數，且四個數字恰為 $a, b, c, d$ 的重新排列，試求四位數 $abcd =$ \_\_\_\_\_
- 已知數列 $\{a_n\}$ 的一般項為 $a_n = \frac{1+\sqrt{8n-7}}{2}$ ， $n \geq 1$ ，在此數列中，對所有正整數 $k$ ，都存在一個正整數 $n$ 使得 $a_n = k$ (如： $a_2 = 2, a_4 = 3, a_7 = 4, \dots$ )。若某保險箱的密碼是由四個二位數 $p, q, r, s$ (均為00~99其中之一)組成，而已知 $(a_p, a_q, a_r, a_s) = (9, 5, 2, 7)$ ，試求 $(p, q, r, s) = (\_, \_, 02, \_)$
- 有一正實數 $a$ ，其整數部分 $n$ 、小數部分 $b$ 與自身恰形成一等比數列(請思考一下 $n, b, a$ 的大小順序)。試求此實數 $a =$ \_\_\_\_\_
- 若 $x$ 是實數且滿足方程式 $2x^2 - 6x - 5\sqrt{x^2 - 3x - 1} = 5$ ，則 $x =$ \_\_\_\_\_

10. 若想用等長的吸管作出如下的金字塔結構，最左邊的一層金字塔需要6根等長的吸管，而中間兩層高的金字塔需要24根等長的吸管，依此類推，若想搭一個十層高的金字塔，共需要\_\_\_\_\_根等長的吸管



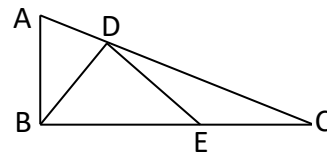
11. 令  $f(x) = \sqrt{x^2 - 8x + 41} + \sqrt{x^2 + 8x + 17}$ ，已知當  $x = a$  的時候， $f(x)$  會有最小值  $b$ ，試求實數數對  $(a, b) =$  \_\_\_\_\_

12. 令  $f(x) = \frac{(x-\sqrt{5})^2}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{2})} + \frac{(x-\sqrt{3})^2}{(\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} + \frac{(x-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{2}-\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}$ ，試求  $f(\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{2}) =$  \_\_\_\_\_

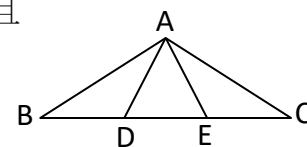
13. 令  $f(x) = \frac{3^x}{3^x + \sqrt{3}}$ ，試求  $f(\sin^2 10^\circ) + f(\sin^2 20^\circ) + f(\sin^2 30^\circ) + \dots + f(\sin^2 80^\circ) =$  \_\_\_\_\_  
(提示：若  $a + b = 1$ ，則  $f(a) + f(b) = ?$ )

14. 在坐標平面上，由原點  $O(0,0)$  出發的一道光線，射到鏡面(視為平面上一直線)上一點  $P(3,4)$  後反射通過點  $Q(27,11)$ ，試求此鏡面在坐標平面上代表的直線方程式是 \_\_\_\_\_  
(請以  $ax + by + c = 0$  的形式回答)

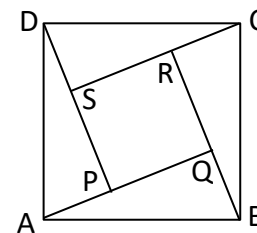
15. 在直角  $\triangle ABC$  中， $\angle B$  是直角， $D, E$  分別在  $\overline{AC}, \overline{BC}$  上使得  $\overline{BD} \perp \overline{DE}$ ，若  $\overline{AB} = \overline{BD} = 20$ ， $\overline{BC} = 50$ ，試求  $\overline{DE} =$  \_\_\_\_\_



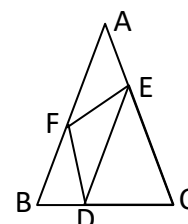
16. 在  $\triangle ABC$  中， $\overline{AB} = \overline{AC} = 1$ ，若  $D, E$  在  $\overline{BC}$  上使得  $\overline{AD}, \overline{AE}$  三等分  $\angle BAC$ ，且  $\overline{AD} = \overline{BE} = x$ ，試求  $x =$  \_\_\_\_\_



17. 右圖(示意圖)的正方形  $ABCD$  是由四個全等的直角三角形與一個正方形  $PQRS$  拼湊而成，令  $\angle QAB = \theta$ ，試問當正方形  $PQRS$  的面積恰為正方形  $ABCD$  的一半時， $\sin \theta + \cos \theta =$  \_\_\_\_\_



18. 在右圖(示意圖)的等腰  $\triangle ABC$  中， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ， $D, E, F$  分別在  $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$  上使得  $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$ ，若  $\triangle BDF$ 、 $\triangle AEF$ 、 $\triangle CDE$  的面積分別是 10, 14, 32，試求  $\triangle DEF : \triangle ABC =$  \_\_\_\_\_



嘉義縣市 111 學年度【旭日東昇盃】高中數學競賽--高二團體賽解答

1.	2.	3.	4.(1)	4.(2)
12	$\frac{12}{19}$	$\frac{28}{27}$	母、兄 (對一個給 3 分)	妹、母 (對一個給 3 分)
5.(1)	5.(2)	6.	7.	8.
$n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ $- n(B \cap C) - n(A \cap C)$ $+ n(A \cap B \cap C)$	44	1089	(37,11,02,22)	$\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$
9.	10.	11.	12.	13.
-2或5 (對一個給 3 分)	1320	$(-\frac{8}{3}, 10)$	1	4
14.	15.	16.	17.	18.
$9x - 13y + 25 = 0$	21	$\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\frac{2}{9}$