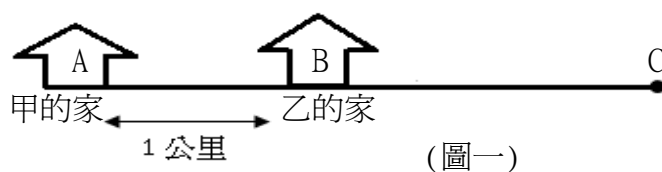


99 學年度雲嘉南區張進通、許世賢國中數學競試 第二試試題

一、填充題(14 格, 每格 5 分, 共 70 分)

- $2^{2010}$  除以 7 的餘數為 ① 。
- 自 1~9 這 9 個阿拉伯數字中任選 5 個數字排成一個五位數，在這個五位數中任兩個數字之差不小於 2，則滿足這樣條件的五位數共 ② 個。
- 已知正整數  $m$ 、 $n$  ( $m$  與  $n$  互質) 使得最簡分數  $\frac{m}{n}$  滿足  $\frac{1}{3} < \frac{m}{n} < 1$ 。若將分數  $\frac{m}{n}$  的分母乘以一個正整數，而分子加上此正整數，所得新分數的值與原分數的值相同。則滿足此條件的所有分數  $\frac{m}{n}$  共 ③ 個。
- 把分數依下列方式排成一數列： $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{n}{1}, \frac{n-1}{2}, \dots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n}, \dots$ ，其中  $n$  為正整數。則  $\frac{30}{31}$  在第 ④ 項。
- 若  $a > 0, b > 0$  且  $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{2}{a+b}$ ，則  $(\frac{b}{a})^3 + (\frac{a}{b})^3 =$  ⑤ 。
- 若  $\frac{1006 \times 1007 \times 1008 \times \dots \times 2010}{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times 2009} = 2^k$ ，求正整數  $k =$  ⑥ 。
- 甲、乙兩人的家相距 1 公里，如(圖一)所示，他們的朋友相約在下午 6:00 要在甲的家 A 點烤肉，甲打電話向乙借烤肉架，並於下午 5:15 出門以每小時 5 公里的速度朝乙的家 B 點的方向行走，而乙則一個人抬著烤肉架於下午 5:00 出門，但卻走錯方向，朝 C 點的方向行走，直到甲在 C 點追上乙時，兩人才以每小時 4 公里的速度折返，兩人合力抬烤肉架而準時在下午 6:00 回到甲的家 A。  
試問：(1) B 到 C 距離為 ⑦ 公里。  
(2) 乙一個人抬烤肉架由 B 走到 C 的速度為每小時 ⑧ 公里。

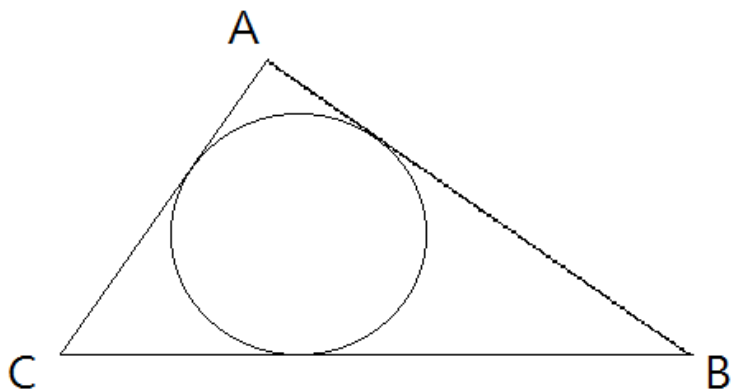


8. 如(圖二)在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $\overline{AB} = 4$ ， $\overline{AC} = 3$ ， $\overline{BC} = 5$ ，過 $\triangle ABC$ 的內心 $I$ 作 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ，

分別交 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 於 $D$ 、 $E$ 。

試求：(1)  $\triangle ABC$ 內切圓半徑之長為 ⑨。

(2)  $\overline{DE}$ 之長為 ⑩。

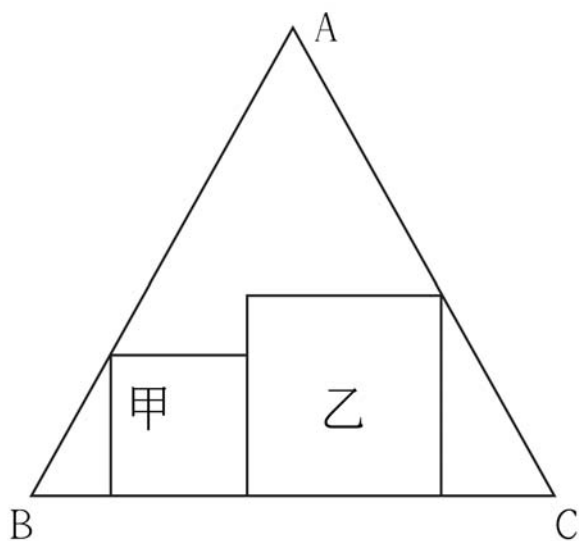


(圖二)

9. 如(圖三),在邊長為 $3 + \sqrt{3}$ 的正三角形 $\triangle ABC$ 內部，如圖所示的方式，內接有甲、乙兩個正方形

(甲、乙有一邊相重疊，且各有一邊位於 $\overline{BC}$ 上，甲正方形一頂點在 $\overline{AB}$ 上，乙正方形有一頂點在 $\overline{AC}$ 上)。

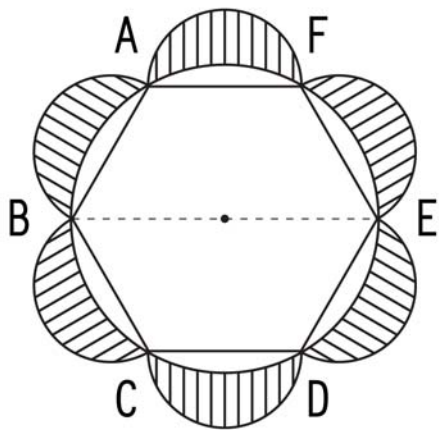
試求：甲、乙兩面積之和的最小值為 ⑪。



(圖三)

10. 如(圖四)以半徑為 4 作一個大圓，在此大圓內部作一內接正六邊形，並在每一個邊作一半圓，得到六個半圓與大圓所圍的斜線區域。

- (1)求矩形  $ACDF$  之面積為           ⑫          。
- (2)求此六個斜線區域的面積總和為           ⑬          。

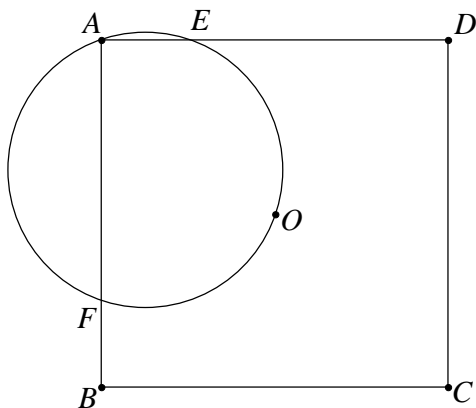


(圖四)

11. 如(圖五)， $O$  為邊長 5 的正方形  $ABCD$  的中心（對角線的交點），一圓半徑 2 且過  $O$ 、 $A$  兩點，且與  $AD$  邊、 $AB$  邊分別交於  $E$ 、 $F$  兩點。

若  $\overline{AF} > \overline{AE}$ ，求  $\overline{AF} =$            ⑭          。

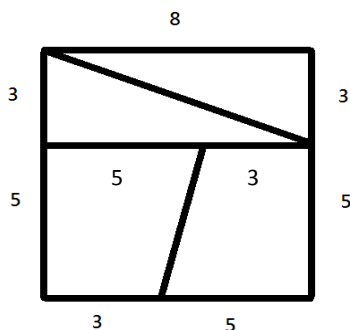
(Hint： $\triangle OAE$  與  $\triangle OBF$  全等。)



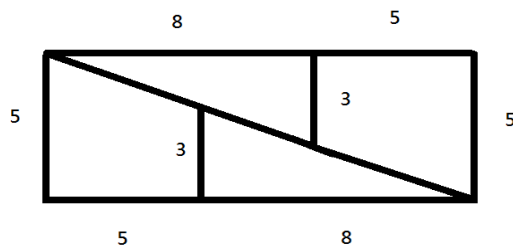
(圖五)

## 二、計算題(共 30 分):

1. 設  $x, y$  為正整數且  $x < y$ ，已知  $\begin{cases} xy + x + y = 35 \\ x^2y + xy^2 = 286 \end{cases}$ ，求數對  $(x, y) = ?$  (10 分)
2. 海灘有一堆椰子，屬於四隻猴子所共有，牠們約定好平均分配。第一隻猴子先來到，等了一會兒，不見另外其它同伴來，於是就將椰子分成四堆，每堆的個數相等，但剩下一個，牠取走一堆，並且將多餘的一個丟進海裏。接著第二隻猴子來到，將剩下椰子再分成四堆，每堆個數相等，又剩下一個，牠取走一堆，並將多餘的一個丟入海裏。第三與第四隻也都先後依次如同上述方法來做。假設最初有  $x$  個椰子，最後剩下  $y$  個椰子，問：
- (1) 第一隻猴子取走一堆，並且將多餘的一個丟掉後離開，剩下幾個椰子？(用  $x$  表示答案) (2 分)
- (2) 試將  $y$  用  $x$  表示為  $y = Ax + B$  或  $y = \left(\frac{b}{a}\right)^4 (x + c) - d$ ，其中  $A, B$  是分數且  $a, b, c, d$  都是正整數。  
(選擇一種表示方法即可)(4 分)
- (3) 求最小的正整數  $x$ 。(4 分)
3. 下面的剪接證法，得到  $64 = 65$  的結果，試說明其中誤謬的地方。  
[證明] (圖六)是一個面積為 64 平方單位的正方形。將此正方形依圖中的線條分割後，並依照(圖七)的樣子拼合，就會得到一個外觀是矩形的圖形且面積為 65 平方單位。故得到  $64 = 65$ 。



(圖六)



(圖七)