99 學年度雲嘉南區張進通、許世賢國中數學競試　第一試試題

一、填充題(12 格, 每格 5 分, 共 60 分)

1. 在一條筆直的道路上，有 A、B、C、D 四個城市,但不知四個城市分佈的先後順序,只知 A, B, C, D 四個城市之間的直線距離資料，列表如下：

	C	D
A	15	7
B	9	17

請問城市 A 和城市 B 之間的直線距離為 ＿①＿。

2. 設 x 為一實數，定義〔 x 〕表示不大於 x 的最大整數，例如：〔 3.5 〕=3，〔 −1.5 〕= −2 ，則

$[-\sqrt{81}]+[-\sqrt{80}]+[-\sqrt{79}]+\cdots+[\sqrt{78}]+[\sqrt{79}]+[\sqrt{80}]=$ ＿②＿。

3. 某四位數與其各位數字和為 2010，求這四位數為 ＿③＿。

4. 有一個二位數，其十位數字比個位數字小，並且個位數字非零。十位數字與個位數字的乘積可以被十位數字與個位數字的和整除。則這個二位數為 ＿④＿。

5. 已知 24 的正因數有 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 和 24 共 8 個。那麼恰好有 30 個正因數的正整數中最小者為＿⑤＿。

6. 設 a,b,c 為正實數，$a+b+c=7$ 且 $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=\frac{10}{7}$。則 $\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}$ 之值為 ＿⑥＿。

7. 下列四數 $a=2\sqrt{41}-9\sqrt{2}, b=2\sqrt{113}-15\sqrt{2}, c=2\sqrt{145}-17\sqrt{2}, d=2\sqrt{85}-13\sqrt{2}$ ，將此四數由大到小做正確的排列＿⑦＿。(用 a,b,c,d 作答)

8. 求 $\sqrt{2007\times2008\times2009\times2010+1}$ 之值= ＿⑧＿。

9. 每年六月，英國的溫布頓都要舉行一次網球大賽。今年的男子單打共有 139 位選手參加比賽，利用抽籤以決定兩個選手互為對手同一組比賽，落單的選手無條件進入下一輪；每一輪落敗的淘汰，且每一輪都是用抽籤決定對手。試問一直到冠軍產生，一共進行了＿⑨＿場比賽。

10. 自 1~9 這 9 個阿拉伯數字中挑出三個不同的數字，再將它們排成 6 個相異三位數。若這 6 個三位數的和介於 4400 與 4700 之間，則這三個數字共＿⑩＿種選法。

11.

1　2　3　4　$\cdots$　97　98　99　100

3　5　7　$\cdots$　195　197　199

8　12　$\cdots$　392　396

20　$\cdots$　788

$\ddots$　$\cdots$　$\iddots$

$\ddots$　$\cdots$　$\iddots$

K

已知一個排列如三角形狀的數列如上所示：其中第一列各數依次爲 1, 2, 3, $\cdots$, 100。
從第二列起，每個數分別爲上一列的左與右兩數的和,若此三角形最下方的數字爲 K。

觀察:

1　2　3　4　$\rightarrow$　1+4= 5

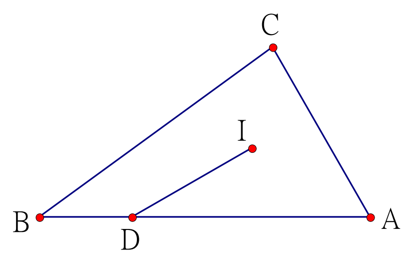
3　5　7　$\rightarrow$　3+7=10

8　12　$\rightarrow$　8+12=20

20　$\rightarrow$　20

若 K 可表示成 $2^M \times N$,其中 M 爲正整數, N 爲奇數,試求數對(M , N)=___⑪___。

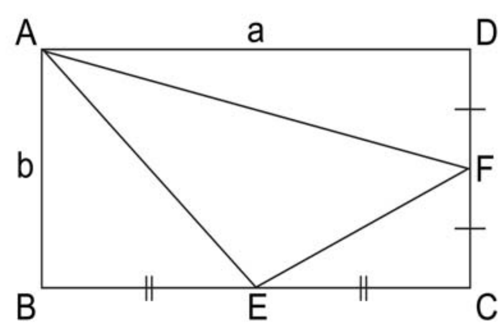
12. 如(圖一)，ΔABC 中，$\overline{CB} > \overline{CA}$，$D$ 爲 $\overline{AB}$ 上一點，滿足 $\overline{CB} - \overline{CA} = \overline{BD}$ ，I 爲 ΔABC 三條內角平分線的交點，若 $\overline{ID} = 8\sqrt{3}$,則 $\overline{IA}$ =___⑫___。



(圖一)

二、計算題(共 40 分)

(10 分)1.如(圖二),設長方形 $ABCD$ 的長是 a ，寬是 b $(a \rangle b)$ ， E, F 分別是 $\overline{BC}$ 與 $\overline{CD}$ 的中點，欲使 ΔAEF 是直角 Δ ，則 $\frac{a}{b}$ 之值爲何?



(圖二)

(15 分)2.中世紀西歐經濟開始繁榮，西方商人到東方來經商的逐漸多了起來，他們學習了東方文化。其中有一個義大利的商人兼數學家斐波那契，他在東方旅行後出版了一本書「算盤之書」，在這本書中提出了一對兔子繁殖問題，這就是斐波那契數的由來。其兔子繁殖對數如下表:

月份	12 (去年)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
兔子的對　數	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233

現在把各月份的兔子對數，排成一列數：

$a_1 = 1,\quad a_2 = 1,\quad a_3 = 2,\quad a_4 = 3,\quad a_5 = 5,\quad a_6 = 8,\quad a_7 = 13,\quad a_8 = 21,\quad a_9 = 34,\quad a_{10} = 55,$

$a_{11} = 89,\ a_{12} = 144,\ a_{13} = 233, \cdots\cdots$

上面這一列數就稱爲斐波那契數列，其中有一性質爲 $a_{m+n} = a_{m-1} \cdot a_n + a_m \cdot a_{n+1}$

(1) 依據這個數列的性質求出第 24 項，a_{24} 爲何?(5 分)

(2) 依據這個數列的性質求出第 25 項，a_{25} 爲何? (5 分)

(3) 求 $\dfrac{a_{25}}{a_{24}} = ?$ (計算到小數點第三位,第四位四捨五入) (5 分)

(15 分)3.俄國畫家波格達洛夫・別列斯基有一幅名畫，畫名就叫「難題」。

這幅畫是爲了讚揚身兼科學家和教育家的拉金斯基，拉金斯基是俄國的一位教授，但是他情願放棄教授的職位，而到農村去給兒童做啓蒙工作－小學數學教師。

試回答有關這個難題的題組：

如果 a,b,c,d,e 都是正整數，請算出下列各未知數。

(1) 若 $365 = a^2 + b^2$，試問數對 $(a,b) = ?$(4 分)

(2) 若 $365 = c^2 + d^2 + e^2$，試問數對 $(c,d,e) = ?$(8 分)

根據前兩小題所找出的答案，找出符合下列式子的正整數 m,n，其中 m 爲二位數，n 爲個位數。

(3) 若 $\dfrac{m^2 + (m+1)^2 + (m+2)^2 + (m+3)^2 + (m+4)^2}{365} = n$，試問數對 $(m,n) = ?$(3 分)