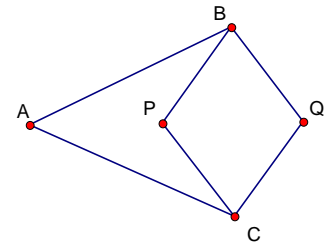


一、填充題(每格 6 分，共 72 分)

1. 設  $a=2^{20}-1$ ，則  $a$  的所有質因數之和為\_\_\_\_\_。
2. 箱子中有 130 顆球，其中有 35 顆紅球、35 顆黃球、35 顆綠球，其餘的是黑球或白球。今任意取出  $k$  顆球，若希望取出的球中一定有 26 顆以上(含 26 顆)同色的球，則  $k$  之最小值為\_\_\_\_\_。

3. 如圖(一)，若  $\overline{AB} = \overline{AC} = 7$ ， $\overline{BP} = \overline{BQ} = \overline{CP} = \overline{CQ} = 5$ ，則  $\overline{AP} \cdot \overline{AQ}$  之值為\_\_\_\_\_。

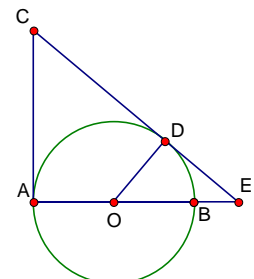


圖(一)

4. 已知  $a = \sqrt{2006^2 + 2006 \times 3 + 2010}$ ，則正整數  $a$  之值為\_\_\_\_\_。
5. 若正六邊形的內切圓半徑為  $r$ ，外接圓半徑為  $R$ ，則  $r : R$  之比值為\_\_\_\_\_。

6. 設  $x = 10^n - 1234$ ，且  $x$  的各個數字總和為 162，則正整數  $n =$ \_\_\_\_\_。

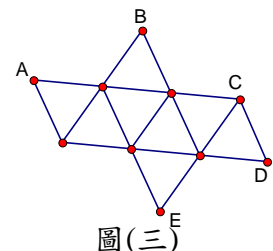
7. 如圖(二)， $O$  為圓心， $\overline{AB}$  為圓的直徑， $\overline{CA}$  與  $\overline{CE}$  分別切圓於點  $A$  與  $D$ ，若  $\overline{AB} = 16$ ， $\triangle ODE$  的周長為 24，則  $\triangle ACE$  的周長為\_\_\_\_\_。



圖(二)

8. 如果有一三位數  $abc$  滿足  $a > b$  且  $c > b$ ，則稱這樣的三位數為凹數，例如 805、767 皆是凹數，那麼所有的凹數共有\_\_\_\_\_個。

9. 圖(三)是正八面體的展開圖，將其黏成一個正八面體，則  $B$ 、 $C$ 、 $D$ 、 $E$  四點中會和  $A$  點黏在一起的有哪些點？\_\_\_\_\_。



圖(三)

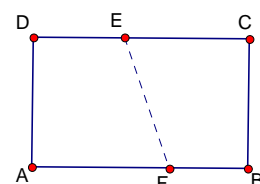
10. 已知一最簡分數其分母為 24，且此分數大於 5 小於 15，則滿足上述條件的最簡分數共有\_\_\_\_\_個。

【分子與分母互質的分數，稱為最簡分數，例如  $\frac{2}{9}$ 、 $\frac{15}{7}$  均是最簡分數】

11. 設  $k$  是整數，且  $15x^2 + kx - 4$  可因式分解為  $(px+q)(rx+s)$ ，其中  $p$ 、 $q$ 、 $r$ 、 $s$  均為整數。若所有不同的  $k$  值共有  $a$  個， $k$  之最大值为  $b$ ， $k$  之最小值为  $c$ ，則  $a+b+c =$ \_\_\_\_\_。

12. 如圖(四)， $ABCD$  為一矩形， $\overline{AB} = 5$ ， $\overline{BC} < 4$ ，以  $\overline{EF}$  為摺痕，將矩形摺起來

可使  $A$  與  $C$  兩點重合，若  $\overline{EF} = \sqrt{6}$ ，則  $\overline{BC} =$ \_\_\_\_\_。

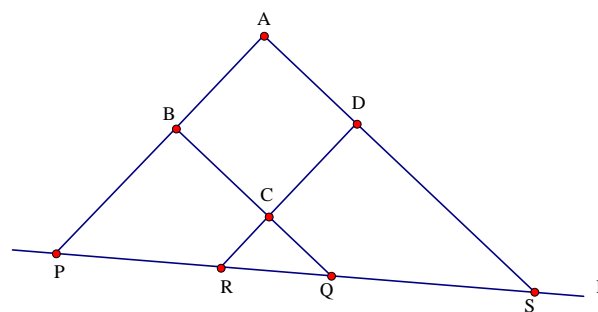


圖(四)

二、計算與證明題(第 1 題 8 分，第 2 題 10 分，第 3 題 10 分，共 28 分)

1. 解聯立方程組 
$$\begin{cases} \frac{x-y}{1+xy} = \frac{1}{3} \\ \frac{x+y}{1-xy} = 3 \end{cases}$$
。

2. 如圖(五)， $ABCD$  是一正方形， $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CD}$ 、 $\overline{DA}$  的延長線分別交直線  $L$  於  $P$ 、 $Q$ 、 $R$ 、 $S$ 。已知  $\overline{PR} = 3$ ， $\overline{QS} = 4$ ，求正方形  $ABCD$  的邊長。



圖(五)

3. 在  $\triangle ABC$  中，如圖(六)，若  $\overline{AC} > \overline{AB}$ ，且  $\overline{AD}$  是  $\angle BAC$  的分角線，交  $\overline{BC}$  於  $D$  點，求證： $\overline{CD} > \overline{BD}$ 。以下是甲生的證明過程，但是有出錯，請找出來(3 分)，並給予正確的證明(7 分)。

(1) 在  $\overline{AC}$  上取一點  $E$ ，使得  $\overline{AE} = \overline{AB}$ ，連結  $\overline{ED}$ 。

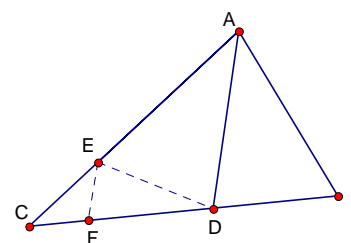
(2) 在  $\overline{CD}$  上取一點  $F$ ，使得  $\overline{DF} = \overline{ED}$ ，連結  $\overline{EF}$ 。

(3)  $\because \overline{AE} = \overline{AB}$ ， $\overline{AD} = \overline{AD}$ ， $\angle BAD = \angle EAD$

$\therefore \triangle BAD \cong \triangle EAD$ ，故  $\overline{BD} = \overline{ED}$ 。

(4)  $\because \overline{DF} = \overline{ED}$ ， $\overline{BD} = \overline{ED}$   $\therefore \overline{BD} = \overline{DF}$

又  $F$  在  $\overline{CD}$  上，故  $\overline{CD} > \overline{DF}$ ，因此  $\overline{CD} > \overline{BD}$ 。



圖(六)