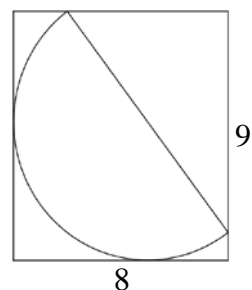


數學一試題

一、填充題：每題 5 分，共 80 分

1. 右圖是矩形內接一半圓形，且半圓圓弧與矩形的邊相切。

則此半圓形的半徑長為_____。



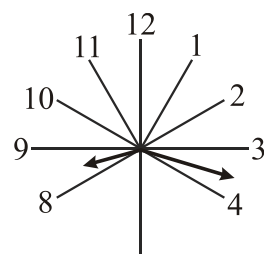
2. 小華準備向銀行貸款4百萬元當做創業基金，其年利率為4%，約定三年期滿一次還清貸款的本利和。銀行貸款一般以複利（每年複利一次）計息還款，但給小華創業優惠改以單利計息還款。試問在此優惠下，小華在三年期滿還款時可以比一般複利計息少繳元_____。

3. 已知 $x^2 - 5x + 1 = 0$ ，則 $x^3 + \frac{1}{x^3} =$ _____。

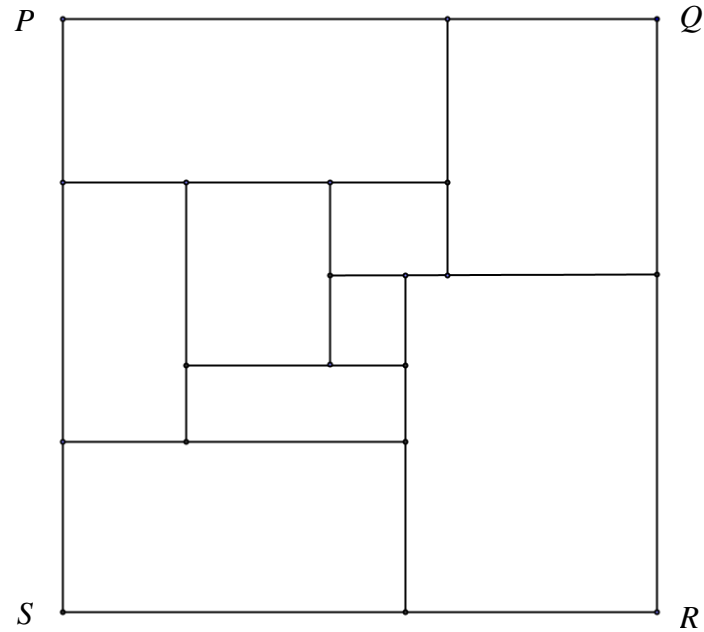
4. 設函數 $f(x)$ 滿足 $f(x) + 2f(\frac{1}{x}) = x^2$ ，其中 x 為任意異於 0 的實數，則 $f(\frac{2}{3}) =$ _____。

5. $\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x-8)^2 + y^2} + \sqrt{(x+4)^2 + (y-5)^2} + \sqrt{(x-6)^2 + (y-8)^2}$ 的最小值為_____。

6. 阿宇在班上的外號叫「昏睡大魔王」，每天早上第一節就開始打瞌睡，有一天他打瞌睡時，突然被老師的粉筆襲擊而驚醒過來，這時他望見牆上時鐘顯示的時間是八點多，且他發現時針和分針正好對稱於鉛垂線（即 6 點與 12 點的連線），那麼此時的時間是八點_____分。（答案請以帶分數的型式表示）

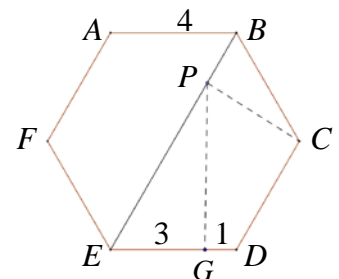


7. 矩形 $PQRS$ 按照下圖所示的方式分成 9 個大小都不相同的正方形（下圖為示意圖，邊長未照比例畫出）。所有正方形的邊長均為整數。若最小正方形的邊長為 2 公分，則矩形 $PQRS$ 的面積為 _____。

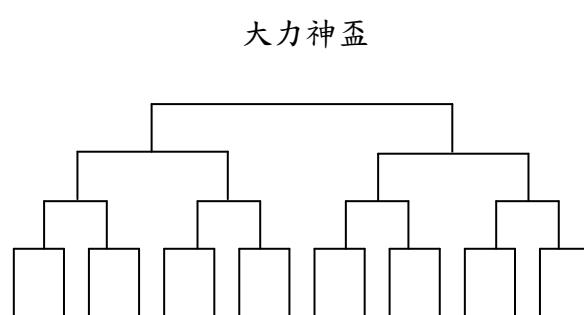


8. 在某入場券販賣處的窗口，在開始販賣前就形成購買入場券的行列，而在開始販賣時有 40 人。由於販賣後也以一定的比例聚集購買的人，因此在 1 個窗口，到這個行列消失要花 10 分鐘。再者，如果窗口有 2 個的話，這個行列只要 4 分鐘就不見了。如果窗口為 3 個的話，這個行列需要_____分鐘才會消失。（假設在窗口賣入場券的時間，任何人都相同。）

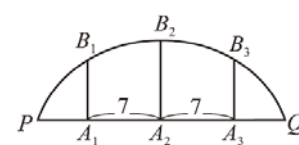
9. 如右圖，在正六邊形 $ABCDEF$ 中， $\overline{AB} = 4$ ， G 在 \overline{DE} 上， $\overline{EG} = 3$ ， $\overline{GD} = 1$ ，在 \overline{BE} 上有一動點 P ，則 $\overline{PC} + \overline{PG}$ 的最小值為_____。



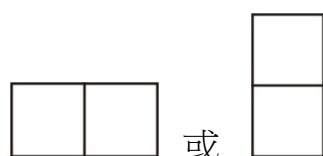
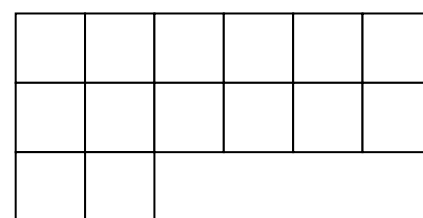
10. 巴西、阿根廷、荷蘭、德國…等 16 個國家踢進了 2010 世界盃足球比賽的 16 強賽，比賽採單淘汰制，先抽籤決定號次再兩兩進行比賽，輸者淘汰出局，贏者晉級下一輪的比賽，連贏四場者可獲得「大力神盃」（冠軍獎盃）。已知 巴西 的實力較強，其餘國家的實力彼此相當，除 巴西 外的其他國家相互對局時各有 $\frac{1}{2}$ 的機率取得勝利，碰到 巴西 時則只有 $\frac{1}{3}$ 的機率取得勝利。則 德國 得冠軍的機率為_____。（化成最簡分數）



11. 如右圖所示，橋面 \overline{PQ} 上有一圓拱形的鋼樑，已知橋面 $\overline{PQ} = 30$ 公尺，在距離中心 A_2 的左右 7 公尺處各有一條鋼纜 $\overline{A_1B_1}$ 及 $\overline{A_2B_2}$ 連接橋面，且 $\overline{A_1B_1} = \overline{A_3B_3} = 4$ 公尺，則拱高 $\overline{A_2B_2}$ 有_____公尺。



12. 一個房間的地面是由 14 個正方形所組成，如右圖。如今想用長方形瓷磚鋪滿地面，已知每一塊長方形瓷磚可以覆蓋兩個相鄰的正方形，即



或。則用 7 塊瓷磚鋪滿房間地面的方法有_____種。

13. 如右圖，以三種顏色塗 A, B, C, D, E 五個區域，每區一色，則同色不相鄰且三色全用之塗法有 _____ 種。

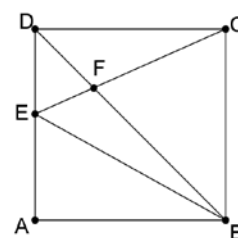
A	B	C	D	E
-----	-----	-----	-----	-----

14. 已知 α, β 為 $x^2 - 6x + 1 = 0$ 的兩根， z, w 為 $x^2 + 5x + 1 = 0$ 的兩根，則

$$(z - \alpha)(z - \beta)(w + \alpha)(w + \beta) = \underline{\hspace{2cm}}。$$

15. 試求 $\sqrt{11111111 \times 100000005 + 1}$ 之值 = _____。

16. 有一正方形 $ABCD$ ， E 為 \overline{AD} 上一點， \overline{EC} 與 \overline{DB} 交於點 F 。已知 $\triangle DEF$ 的面積為 1、 $\triangle EAB$ 的面積為 8，求此正方形 $ABCD$ 的面積 _____。

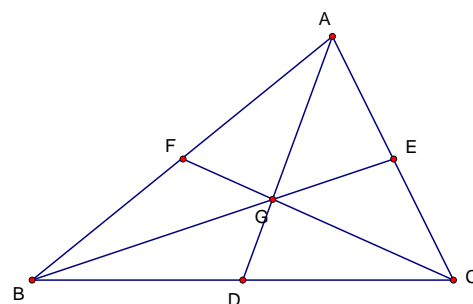


二、計算題證明題

1. 設 x, y 為正整數，已知 $\begin{cases} xy + x + y = 35 \\ x^2y + xy^2 = 286 \end{cases}$ ，求 (x, y) 的解 (6 分)。

2. $\triangle ABC$ 中，如右圖， \overline{AD} ， \overline{BE} ， \overline{CF} 分別為 \overline{BC} ， \overline{AC} ， \overline{AB} 之中線，且 \overline{AD} ， \overline{BE} ， \overline{CF} 交於 G 點。

試證： $\frac{3}{4}(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}) < \overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CF} < \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}$ (7 分)。



3. 設 $x_1, x_2, \dots, x_{2015}$ 是整數，且滿足下列條件

(1) $-1 \leq x_n \leq 2 (n = 1, 2, \dots, 2015)$

(2) $x_1 + x_2 + \dots + x_{2015} = 205$

(3) $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{2015}^2 = 2015$

試求 $x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_{2015}^3$ 之最大值 (7 分)。