

數學二試題

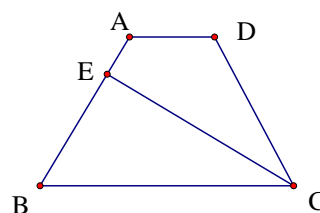
一、填充題：每格 5 分 (80%)

1 已知 $\langle a_n \rangle$, $\langle b_n \rangle$ 為兩個等差數列, 且前 n 項和的比為 $(5n+7):(2n+1)$, 則 $a_4:b_4 =$ _____

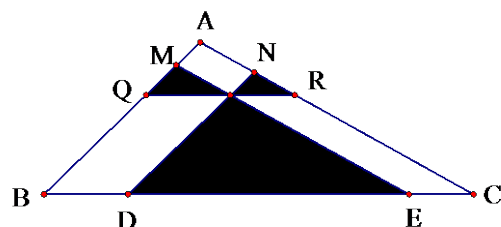
2 若 $A=1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times n$ 的乘積, 將 $A \div 24$, 若能整除, 則將商再繼續除以 24, 直到不能整除時。此時, 最後留下的商為 34650。試問, 自然數 $n =$ _____

3 有一長 104 公分, 寬 28 公分的矩形。若將此矩形恰剪成 n 塊正方形, 且每個正方形的邊長不一定要相等。則 n 的最小值 _____

4 如圖, 梯形 $ABCD$ 中, \overline{AD} 平行 \overline{BC} , \overline{CE} 平分 $\angle BCD$ 且 $\overline{CE} \perp \overline{AB}$, $\overline{BE} = 3\overline{AE}$, 則(四邊形 $ADCE$ 面積): ($\triangle BCE$ 面積) = _____



5 如右圖, P 為 $\triangle ABC$ 內部一點, 過 P 作三條與三邊平行的線段 \overline{QR} , \overline{ND} , \overline{ME} 。若 $\triangle MPQ$, $\triangle NPR$, $\triangle PDE$ 的面積分別為 9, 4, 100, 求平行四邊形 $AMPN$ 的面積 _____



6 求 $(\sqrt{6} + \sqrt{7} + \sqrt{8})(\sqrt{6} + \sqrt{7} - \sqrt{8})(\sqrt{6} - \sqrt{7} + \sqrt{8})(-\sqrt{6} + \sqrt{7} + \sqrt{8}) =$ _____

7 已知 x, y 均為正數, 若 $2015x^2 = 2016y^2$ 且 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$, 求 $\sqrt{2015x + 2016y} =$ _____

8 若 m, n 為 $x^2 - 104x - 2015 = 0$ 的兩相異根, 求 $(m^2 - 102m - 2019)(n^2 - 105n - 2013) =$ _____

9 兩個二次函數 $y=f(x)=x^2-4x+6$ 與 $y=g(x)=-x^2+8x+8$ 的圖形恰可圍出一個封閉區域。現有一條保持與 x 軸垂直的直線 L , 在此封閉區域內左右移動, 若 L 與 $f(x)$ 及 $g(x)$ 的交點分別為 P, Q , 求 \overline{PQ} 長的最大值 _____

10 有一圓 O , \overline{AB} 與 \overline{PQ} 均為圓 O 的直徑, $\overline{AB} \perp \overline{PQ}$, 若一弦 \overline{QR} 交 \overline{AB} 於 C 點, 且 $\overline{QC} = 6$, $\overline{CR} = 4$, 則圓 O 的面積為 _____

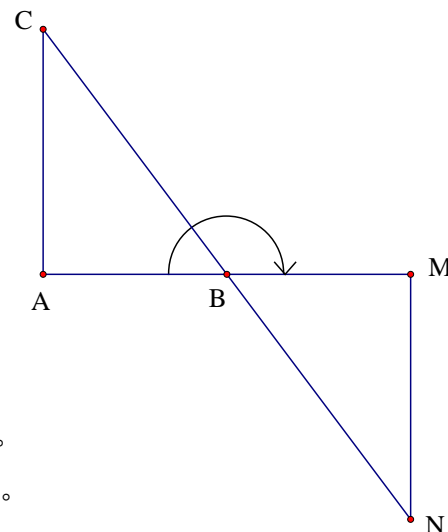
11 若 m, n, k 均為實數, 且 $m-n=6$, $mn+k^2+2k+10=0$, 則 $m =$ _____

12 求值 $\frac{1^2}{1} + \frac{1^2+2^2}{1+2} + \frac{1^2+2^2+3^2}{1+2+3} + \dots + \frac{1^2+2^2+3^2+\dots+10^2}{1+2+3+\dots+10} = \underline{\hspace{2cm}}$

13 已知 $\triangle ABC$ 面積 20, 若 D,E,F 分別在 \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CA} 邊上, 且 $\overline{AD}=3$, $\overline{BD}=5$,
若 $\triangle ABE$ 面積與四邊形 BDFE 面積相等, 則 $\triangle ABE$ 面積 = $\underline{\hspace{2cm}}$

14 若 a,b 為正數, 且 $(a+\sqrt{a^2+10})(b+\sqrt{b^2+6})=12$, 求 $a\sqrt{b^2+6} + b\sqrt{a^2+10} = \underline{\hspace{2cm}}$

15 如圖直角 $\triangle ABC$, $\angle A$ 直角, $\overline{AB}=3$, $\overline{AC}=4$, $\overline{BC}=5$, 以 B 點為軸順時針
旋轉 180 度, A 轉到 M, C 轉到 N。得一新 $\triangle MBN$, 則 \overline{AC} 轉到 \overline{MN}
所掃過的區域面積 = $\underline{\hspace{2cm}}$



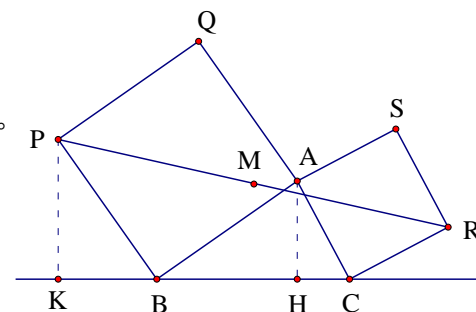
16 將自然數 1~60 依序排列形成數列(一): 1, 2, 3, ..., 59, 60。
將數列(一)當中為 2 的倍數者變號一次, 形成數列(二): 1, -2, 3, -4, 5, -6, ..., 59, -60。
再將數列(二)當中為 3 的倍數者變號一次, 形成數列(三): 1, -2, -3, -4, 5, 6, ..., 59, 60。
試求數列(三)各數的總和為 $\underline{\hspace{2cm}}$

二、計算證明題 (20%)

1 如圖, $\triangle ABC$, 各以 \overline{AB} , \overline{AC} 為邊, 各做正方形 ABPQ 及 ACRS; 且 M 為 \overline{PR} 中點。

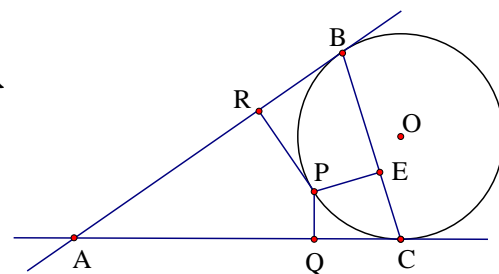
(1) 作 $\overline{AH} \perp \overline{BC}$ 於 H 點, $\overline{PK} \perp \overline{BC}$ 於 K 點, 證明: $\triangle ABH \cong \triangle BPK$ (2%)

(2) 證明: M 到 \overline{BC} 的距離 = $\frac{1}{2} \overline{BC}$ (5%)



2 如圖, 一圓 O, 圓外一點 A 作圓的兩條切線, 得兩切點 B, C, 連接 \overline{BC} 。自 BC 弧
上取一點 P, 自 P 作 $\triangle ABC$ 三邊 \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CA} 的高分別為 \overline{PR} , \overline{PE} , \overline{PQ} 。

證明: $\overline{PQ} \times \overline{PR} = \overline{PE}^2$ (6%)



3 (1) 若 α, β, γ 為 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 的三根, 證明: $\alpha+\beta+\gamma = -\frac{b}{a}$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = \frac{c}{a}$, $\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$ (3%)

(2) 試利用(1)解方程組 $m^3x+m^2y+mz=1$, $n^3x+n^2y+nz=1$, $k^3x+k^2y+kz=1$, 求 $x, y, z = ?$ (答案以 m, n, k 表示) (4%)