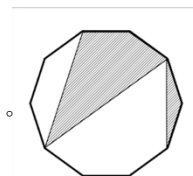


張進通許世賢教育文教基金會 112 學年度雲嘉南區國中數學能力競試

「數學二」試題

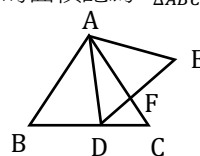
一、填充題：每題 6 分，共 84 分，請在答案卷上作答。

1. 右圖有一個正十邊形，若將全體的面積視為 1，試求出斜線部分的面積為_____。



2. 嘉義內某高中一年級共有 865 位學生要參與投票選出下一位擔任學生代表的高三學長。今有 20 位候選人，從中欲選出 11 位學生代表，每人一票，沒有廢票。試求：候選人至少要獲得_____票才能篤定當選？
3. 有一疊編號為 1~15 的牌，剛開始時依照某一特定順序排列好，進行以下操作：將最上面的紙牌放在桌上，再把第二張紙牌移到整疊牌的最下方，不斷重複這兩步驟，直至全部的牌都放在桌面上。此時若在桌面上的牌由上至下的順序依序就是 1~15，試問一開始的牌堆中，1 號牌位於由上方算起的第_____張牌。
4. 從所有正整數當中剔除 5 的倍數之後由小排到大，如：1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, ...。再將逗號拿掉，把這些數字串成一串數字長列，如：1234678911121314 ...，此時從左邊開始第 9 到第 11 位數都是數字 1，即稱「第 9 位到第 11 位」為第一次出現多於 1 個 1 的位數。若第一次出現多於 1 個 0 的位數是從左邊開始數過來的第 a 位到第 b 位，試求出數對 (a, b) 為_____。

5. 如右方示意圖， $\triangle ABC$ 與 $\triangle ADE$ 皆為正三角形，已知 $\angle BAD > \angle DAC$ 。將 $\triangle ABC$ 的面積記為 $S_{\triangle ABC}$ ，且其餘的三角形也用類似表示方式。若 $\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{5}{6}$ ，試求出 $\frac{S_{\triangle FDC}}{S_{\triangle AFE}}$ 之值。



6. 定義高斯符號 $[x]$ 為不大於 x 之最大整數，如： $[3.5] = 3$ ， $[-3.5] = -4$ 。
並定義正整數 n 之「階乘 (!)」為 $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n$ ，如： $3! = 6$ ， $4! = 24$ 。
試求出方程式 $\left[\frac{x}{1!}\right] + \left[\frac{x}{2!}\right] + \dots + \left[\frac{x}{10!}\right] = 1024$ 的整數解。
7. 日常生活中常會使用十進制來表示一個數字，如： $1011 = 1 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 1 \times 10^0$ 。但是電腦在運算時，都是使用二進制的方式來表示一個數，我們通常會在這種表示法的右下角加上較小的 (2)，如 $1011_{(2)}$ 。至於十進制的較小的 (10) 則通常會省略。二進制與十進制可以進行互換，例如：
 $1011_{(2)} = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 11$ 。若今取一個自然數 n ，試根據以上規則，將 $101101 \dots 101101_{(2)}$ 換成以十進制表示法 (答案請用 n 表示，且不可以用「...」表示)
└─共 $3n$ 個數─┘
8. 現有六個個位數 A 、 B 、 C 、 D 、 E 、 F ，其中 A 、 B 、 D 、 F 皆不為零。現將 B 放在十位數、 C 放在個位數，即可組成一個二位數字 BC (注意此處不是將 B 和 C 相乘)，同理可以做出三位數字 ABC 、 DEF 、二位數字 DE 等其他數字。現若 $A + BC + DEF = ABC + DE + F$ 這個式子恆成立，請問這六個個位數中，哪些數字必定為相同的數？

9. 在一條筆直的道路上有 A 、 B 兩個人，他們分別站在此道路的起點 P 與終點 Q 。

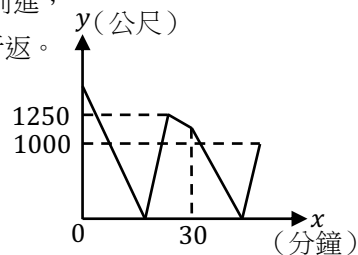
現 A 、 B 兩個人同時出發，並各自分別以不同的速率等速向道路另一段前進，當 A 走到 Q 點時，便會馬上折返。同理，當 B 走到 P 點時，也會馬上折返。

現令兩人同時出發後過了 x 分鐘，兩個人之間的距離為 y 公尺。

當 A 從 P 點出發時開始紀錄，再次回到 P 點時即結束紀錄，

此時 x 與 y 的關係圖（並未依比例繪製）如右圖所示。

試求出起點 P 與終點 Q 之間的距離為_____公尺。



10. 小飛有一天突發奇想，定義了一種「飛氏數」，他定義此「飛氏數」必須要是三位數以上的數字，且該種數字第三位以後數字皆為其前面兩位數字的和，一直寫到兩個數字加起來大於或等於 10 之後便停止。例如：14 → 145 → 1459 中，十位數字的 5 即為千位數字與百位數字之和，個位數字的 9 即為百位數字與十位數字之和，又因為 $5 + 9 = 14 \geq 10$ 無法被寫在單一位數中，因此便停止，1459 便為其中一個「飛氏數」。其他諸如 12358、31459、6066 皆為一種「飛氏數」。試問用此定義方式定義出的「飛氏數」一共有_____個。

11. 現已知 9^{4000} 是一個 3817 位數，且首位數字為 9，試問 $9^2, 9^3, 9^4, \dots, 9^{4000}$ 中，有_____個數字的首位數字為 9？（提示： 9^{21} 和 9^{22} 皆為 21 位數，前者首位數字為 1，後者首位數字為 9。而 9^{23} 和 9^{24} 則分別為 22 位數與 23 位數。）

12. 現有芭樂與奇異果這兩種水果各 2023 個，並依下列規則分給 2023 個人，試問最多能有_____個人「拿到的芭樂比奇異果多」。

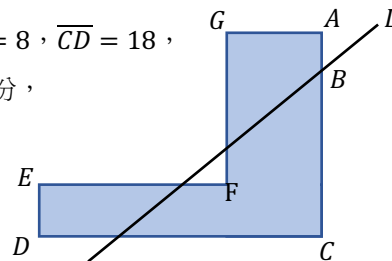
規則 1：全部的水果都要發完。規則 2：每個人最多只能拿到 4 個水果，也可以有人拿 0 個水果。

13. 叻寧漢堡現推出四種新套餐，套餐 A 的價格為一份 130 元，套餐 B 的價格為一份 170 元，套餐 C 的價格為一份 78 元，套餐 D 的價格為一份 104 元。現有一群不知道多少人的旅行團湧入叻寧漢堡店，已知此旅行團中的每個人都點這四種套餐其一，且這四種套餐都被至少點了一份。若總共花費 3600 元，試問此旅行團總共買了_____份套餐 B？

14. 右圖是將兩個矩形的其中一個角重疊之後形成的圖形，已知 $\overline{AC} = 8$ ， $\overline{CD} = 18$ ，

$\overline{EF} = 14$ ， $\overline{GF} = 6$ 。若右圖中的直線 L 將著色部分面積切成三等份，

試求出 $\overline{AB}$ 的長度為_____。



二、計算證明題：兩大題，共 16 分。過程及答案請寫在答案卷上

1. (1) 令 m 、 n 為兩個相異自然數。在平面上畫一條直線，並在此直線上取相異兩點 A 、 B ，若此平面上有一個動點 P ，滿足 $\overline{AP} : \overline{BP} = m : n$ 。試證明若將這些 P 點全部畫出來，會在此一平面上形成一個圓形。(4 分)

- (2) 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\overline{AB} = 2$ ， $\overline{AC} = \sqrt{2} \cdot \overline{BC}$ ，試用 2(1) 的結論求出此三角形的最大面積。(4 分)

2. 設 x ， y 為正實數，且方程組
$$\begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{2}{x+2y} = \frac{1}{\sqrt{x}} \\ \frac{1}{2} - \frac{2}{x+2y} = \frac{1}{\sqrt{y}} \end{cases}$$
，則 $\frac{x}{y}$ 的值為何？(8 分)