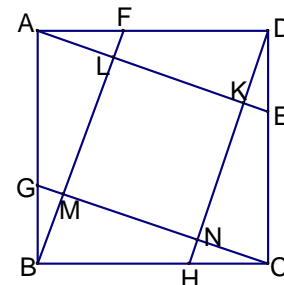


國立嘉義高級中學 108 學年度科學班甄選入學科學能力檢定 數學科能力檢定試題

一、填充題：(80 分，每題 5 分)

1. 有一個函數 $f(x)$ 滿足 $\begin{cases} f(2n) = f(n) \\ f(2n-1) = (-1)^n \end{cases}$ ，其中 n 為正整數，求 $f(1000) + f(3000) + f(5000) + f(7000) + f(9000) = ?$

2. 如右圖所示，正方形 $ABCD$ 中， E 、 F 、 G 、 H 為四邊 \overline{CD} 、 \overline{AD} 、 \overline{AB} 、 \overline{BC} 上的點，且 $\overline{DE} = \frac{1}{3}\overline{DC}$ ， $\overline{AF} = \frac{1}{3}\overline{AD}$ ， $\overline{BG} = \frac{1}{3}\overline{BA}$ ， $\overline{CH} = \frac{1}{3}\overline{BC}$ 。已知小正方形 $KLMN$ 的面積為 16 平方公分，求大正方形 $ABCD$ 的面積為？

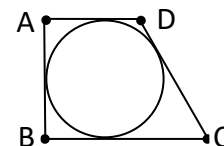


3. 有一個三位數可以被 35 整除且各位數字之和為 15，求此三位數為？

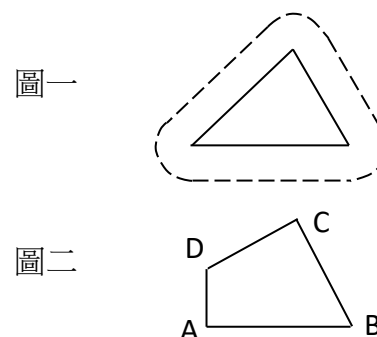
4. 給定點 $C(3,1)$ ，動點 A 在直線 $x = y$ 上，動點 B 在 x 軸上，求 $\triangle ABC$ 周長的最小值是？

5. 設 a 為實數， $\frac{1}{a^2(a^2+1)} + \frac{1}{(a^2+1)(a^2+2)} + \frac{1}{(a^2+2)(a^2+3)} = \frac{3}{28}$ ，求 $a = ?$

6. 如右圖，在梯形 $ABCD$ 中， \overline{AD} 平行 \overline{BC} ， $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ 且 $\overline{BC} > \overline{AD}$ 。若此梯形有一半徑為 2 的內切圓，且此梯形面積為 22，求 $\overline{CD} = ?$



7. 距離每個國家領土兩海浬之內的海域稱為領海，如右圖一所示，三角型區域為領土，虛線圍成的區域(不包含領土)即為該國領海，虛線上每個點距離最近的領土皆為 2 海浬。若有另一島國領土如右圖二，其中 $\overline{AB} = 3$ ， $\overline{AD} = 1$ ， $\overline{BC} = \overline{CD}$ ，且 $\angle A = \angle C = 90^\circ$ ，求圖二的領海面積是多少平方海浬？



8. 如右圖，在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 14$ ， $\overline{BC} = 15$ ， $\overline{AC} = 13$ ，某質點依下列規律運動：

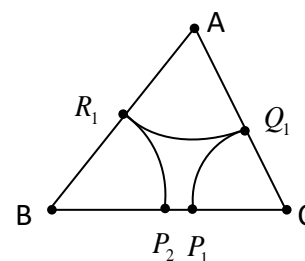
(1)先從 \overline{BC} 上一點 P_1 出發，以 C 為圓心， $\overline{CP_1}$ 為半徑繞圓弧運動到達 \overline{AC} 邊上的點 Q_1 。

(2)再以 A 為圓心， $\overline{AQ_1}$ 為半徑繞圓弧運動到達 \overline{AB} 邊上的點 R_1 。

(3)再以 B 為圓心， $\overline{BR_1}$ 為半徑繞圓弧運動到達 \overline{BC} 邊上的點 P_2 。

(4)依此類推，可得點 P_2 、 Q_2 、 R_2 、 P_3 、 Q_3 、.....。

現在將 $\triangle ABC$ 放在坐標平面上，令 $B = (0,0)$ ， $C = (15,0)$ ， $P_1 = (9,0)$ ，求 P_{10} 的坐標為？



9. 每本書都有一個國際標準書碼 (ISBN)，這是一個十位數的數字，前九碼稱為分類碼，第十碼稱為檢查碼，檢查碼的計算方法是由分類碼的每個數字依序乘以 $1 \sim 9$ ，然後再除以 11 得到的餘數。當餘數為 10 的時候，規定檢查碼為 x ，當餘數分別為 $0 \sim 9$ 的時候，此數字即為檢查碼。舉例來說，某書的分類碼是 957-990-882 ("-"符號為分隔數字用)，則計算 $9 \times 1 + 5 \times 2 + 7 \times 3 + 9 \times 4 + 9 \times 5 + 0 \times 6 + 8 \times 7 + 8 \times 8 + 2 \times 9 = 259$ ，而 259 除以 11 的餘數為 6，則此書的檢查碼為 6，完整的 ISBN 為 957-990-882-6。現有一本書的 ISBN 為 049-620-112-0，若已知此書的分類碼有一個數字抄錯且僅有此數字抄錯，求此書正確的 ISBN 是多少？

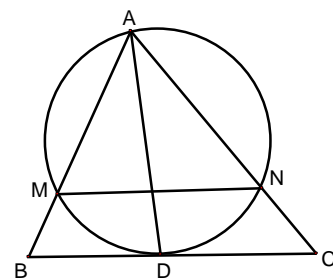
10. 已知數列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 皆為等差數列，且 $\frac{a_1}{b_1} = \frac{4}{7}$ ， $\frac{a_2}{b_2} = \frac{3}{5}$ ， $\frac{a_3}{b_3} = \frac{7}{11}$ ，則 $\frac{a_4}{b_4} = ?$

11. 試計算 $\left(\frac{\sqrt{13} + \sqrt{2} - 3}{\sqrt{2}}\right)^4 + \left(\frac{\sqrt{13} - \sqrt{2} + 3}{\sqrt{2}}\right)^4$ ，若其值為 $a + b\sqrt{2}$ ，其中 a 、 b 為整數，則數對 $(a, b) = ?$

12. 在直角 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 90^\circ$ ， $P_1, P_2, P_3, \dots, P_8$ 將斜邊 \overline{AC} 分成 9 等分，已知 $\overline{BP_1}^2 + \overline{BP_2}^2 + \dots + \overline{BP_8}^2 = 51$ ，則斜邊 \overline{AC} 長為？

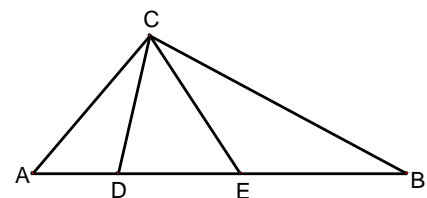
13. 考古學家挖掘某金字塔時發現該金字塔按下列規則建造：(一)此金字塔為一正四角錐(即底面為正方形，四個側面皆為等腰三角形，金字塔頂點投影到底面後會落在正方形中心)。(二)以此金字塔的高為一邊所形成的正方形面積恰為側面一個三角形的面積。若令底面正方形的邊長為 $2a$ ，側面三角形的高為 s ，求 $\frac{s}{a} = ?$

14. 如右圖，在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\overline{AB} = 6$ 、 $\overline{BC} = 7$ 、 $\overline{AC} = 8$ ， \overline{AD} 為 $\angle BAC$ 的角平分線，且 D 在 \overline{BC} 上。若過 A 、 D 且與 \overline{BC} 相切的圓分別交 \overline{AB} 、 \overline{AC} 於 M 、 N ，試求 $\triangle AMN$ 的周長為？



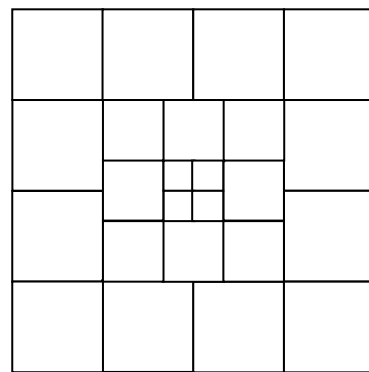
15. 對所有的正整數 n ，若 n 可以分成數個較小的正整數，即 $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ ， $k > 1$ ， n_1, n_2, \dots, n_k 皆為小於 n 的正整數，則稱 (n_1, n_2, \dots, n_k) 是 n 的一個分解。現今 a_n 是 n 的分解中乘積最大的那一個數，求 $a_{16} = ?$
 (舉例來說， $3 = 1 + 1 + 1 = 2 + 1$ ，因為 $2 \times 1 > 1 \times 1 \times 1$ ，所以 $a_3 = 2$ 。
 $4 = 1 + 1 + 1 + 1 = 2 + 1 + 1 = 3 + 1 = 2 + 2$ ，所以 $a_4 = 4$ 。)

16. 如右圖，在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{BC} = 21$ ， $\overline{AC} = 14$ ， $\overline{AB} = 28$ ，取邊 \overline{AB} 上的兩點 D 、 E ，使得 $\overline{AD} = 7$ ， $\angle ACD = \angle BCE$ ，求 \overline{BE} 的長為？



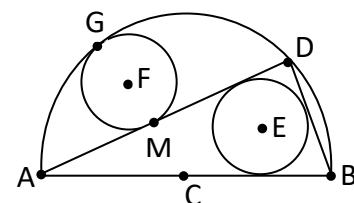
二、計算題：(20 分)

1. 在右圖中，最內側的四個小正方形邊長是 1，小正方形外圍的八個中正方形邊長是 2，中正方形外圍的十二個大正方形邊長是 3，則：



- (1) 試計算四個小正方形、八個中正方形與十二個大正方形面積的總和？(3 分)
- (2) 試依此圖推測 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 20^3 = ?$ (5 分)

2. 如右圖， \overline{AB} 是大圓直徑， C 點是大圓圓心， D 點是大圓圓周上一點，另有半徑相等的兩小圓，圓心分別為 E 、 F ，圓 E 是 $\triangle ABD$ 的內切圓，圓 F 與弓形 AGD 相切於 G 點且與 \overline{AD} 相切於 M 點。若 G 、 F 、 M 、 C 四點在同一直線上，令大、小圓的半徑分別為 R 、 r ，則：



- (1) 試用 R 、 r 來表示 \overline{AB} 、 \overline{BD} 、 \overline{AD} 。(8 分)
- (2) 試求比值 $\frac{r}{R} = ?$ (4 分)

試題結束