109 年度全國科學班聯合學科資格考 數學科 試題卷

第壹部分：單選題、多選題及填充題共 50 分

一、單選題：(共二題，每題 5 分，共 10 分)

說明：第 1 題至第 2 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請填至答案卷之指定欄位。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或書寫多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 若正數 a, b 滿足 $2+\log_2 a = 3+\log_3 b = \log_6(a+b)$，則 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=?$

   (1) 96

   (2) 24

   (3) 48

   (4) 108

   (5) 36

2. 有一個公正的骰子，即點數 $1, 2, 3, 4, 5, 6$ 每個點數出現的機率皆為 $\frac{1}{6}$，現有甲、乙、丙三人，依照甲,乙,丙,甲,乙,丙,…… 這樣的順序輪流擲骰子，而甲獲勝的條件為甲丟出的點數是 6，乙獲勝的條件為乙丟出的點數是 3 或 6，丙獲勝的條件為丙丟出的點數是 2 或 4 或 6，遊戲在有一個人獲勝後就停止，設 p_1 為甲獲勝的機率，p_2 為乙獲勝的機率，p_3 為丙獲勝的機率，試問下列哪個選項是正確的？

   (1) $p_1 < p_2 < p_3$

   (2) $p_1 > p_2 > p_3$

   (3) $p_1 = p_2 = p_3$

   (4) $p_1 < p_2 = p_3$

   (5) $p_1 = p_2 < p_3$

二、多選題：(共三題，每題 5 分，共 15 分)

說明：第 3 題至第 5 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，選出正確選項，請填至答案卷之指定欄位。每題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；所有選項均未作答或答錯多於 2 個選項者，該題以零分計算。

3. 將 12 個禮物分給小科、小學、小班三人，則下列敘述哪些正確？

   (1) 若禮物相異，且全部分完，則分法有 3^{12} 種

   (2) 若禮物相異，且每人 4 個，則分法有 $C^{12}_4 \cdot C^8_4 \cdot C^4_4$ 種

   (3) 若禮物相異，且有二人分到 3 個，另一人分到 6 個，則分法有 $C^{12}_3 \cdot C^9_3 \cdot C^6_6$ 種

   (4) 若禮物相同，且全部分完，則每人至少 1 個的分法有 C^{11}_2 種

   (5) 若禮物相同，可不必分完(也可以三人都不分)，則每人至多 7 個的分法有 $C^{15}_3 - C^3_1 \cdot C^7_3$ 種

4. 下列條件何者能推論出 ΔABC 是等腰三角形?

(1) sin(A+B) = 2sinAcosB

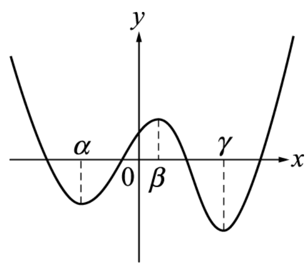
(2) cos(A+B) = 2cosAcosB

(3) sin(A+B) = sinB

(4) sin2A = sin2B

(5) cos2A = cos2B

5. 若四次函數 $y=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ 的圖形如右圖，且滿足$|\beta|<|\alpha|<|\gamma|$，則下列敘述何者正確？



(1) $b<0$

(2) $c<0$

(3) $d<0$

(4) $3b^2-8ac>0$

(5) $4ax^3+3bx^2+2cx+d=0$ 有三個相異實根

三、填充題：(共五題，每題 5 分，共 25 分)

說明：第 A 題至第 E 題為填充題，將答案填至答案卷之指定欄位，每一題完全答對得 5 分，答錯不倒扣；未完全答對不給分。

A. 已知$\triangle ABC$為正三角形，邊長為2。若 $\overrightarrow{AP}=20\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ 、 $\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AB}+20\overrightarrow{AC}$ ，則$\triangle APQ$的面積為__________。

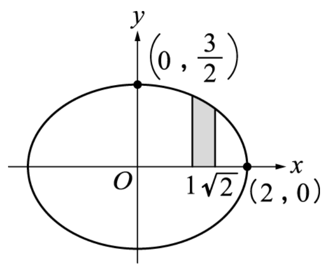
B. 丟擲一個公正骰子(即點數1,2,3,4,5,6每個點數出現的機率皆為$\frac{1}{6}$)三次，設依序出現的點數為a,b,c，定義隨機變數X如下：若a是3的倍數，則$X=b+c$，若a不是3的倍數，則$X=|b-c|$，試求$P(X=4)$的值為__________。

C. 在 xy 平面上有一個圓 C：$x^2+y^2=16$，O 為圓心，且在 y 軸上有一點 $A(0,8)$，若有一光線自 A 點射向第一象限中圓 C 上某一點 P，經反射之後平行 x 軸射出經過A'點，且 A、A'兩點對稱於$\overleftrightarrow{OP}$，試問 P 點的 y 座標為__________。

D. 設 $\cos24°=a$，求複數平面上以 $z^{12}-z^9+z^6-z^3+1=0$ 各根為頂點的多邊形周長__________。(以 a 表之)

E. 右圖為一橢圓Γ，中心在（0，0），長軸長為 4，短軸長為 3，

試求：橢圓Γ與 $x=1$，$x=\sqrt{2}$ 及x 軸所圍成的陰影部分面積為___________。



第貳部分：非選擇題 (數學寫作能力、計算證明題共 50 分)

說明：本部份共有兩題數學寫作能力及五題計算證明題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明題號(1、2)與子題號((1)、(2)、(3))，同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分。務必使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。每題配分標於題末。

四、數學寫作能力：(共二題，共計 12 分)

1. 試證空間中點到平面的距離

$P(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $E:ax+by+cz+d=0$ 的距離為 $d(P,E)=\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$。(6 分)

2. (1) 試敘述棣美弗定理。(2 分)

(2) 設 n 是正整數，若 $z+\frac{1}{z}=2\cos\theta$，試證：$z^n+\frac{1}{z^n}=2\cos n\theta$。(4 分)

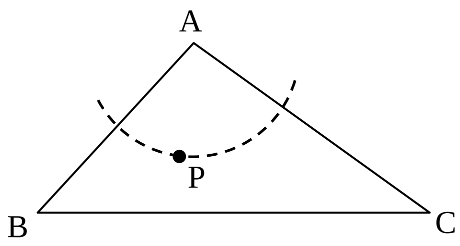
五、計算證明題：(共 5 題，共計 38 分)

1. 設 $0<a<b$，證明：將圓 $x^2+(y-b)^2=a^2$ 繞 x 軸旋轉所得的旋轉體的體積$=2a^2b\pi^2$。(6 分)

(註：這個旋轉體的形狀像輪胎、救生圈或甜甜圈等)

2. 如圖，ΔABC 中，$\overline{AB}=4$，$\overline{BC}=2\sqrt{19}$，$\overline{CA}=6$，以點 A 為圓心，半徑長 2 畫弧，

設 P 為弧上一動點且位在ΔABC 內部，求ΔABP 與ΔACP 面積和之最大值。 (8 分)



3. 若 $g(n)$表示正整數 n 的最大奇因數，例如: $g(3)=3$，$g(14)=7$，令$S_n=g(1)+g(2)+g(3)+\cdots+g(2^n)$，

(1) 試求數列 S_n 的遞迴關係式。(3 分)

(2) $S_{2019}=g(1)+g(2)+g(3)+\cdots+g(2^{2019})$ =? (5 分)

4. 某個班級有 36 個學生，某次考試成績的算術平均數為 50 分，標準差為 10 分，試問最少有多少學生的分數介於 35 分到 65 分之間 (不包含 35 分及 65 分)？(8 分)

5. (1) 設橢圓$\Gamma:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ($a>b>0$) 的兩焦點$F_1(c,0)$ 、$F_2(-c,0)$，若$P(x_0,y_0)$在橢圓Γ上，

試證明：$\overline{PF_1}=a-\dfrac{c}{a}x_0$。(6 分)

(2) 設在橢圓$\Gamma:\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$上有一點$P$滿足$\overline{PF_1}:\overline{PF_2}=2:3$，其中$F_1$ 、F_2為橢圓的兩焦點且F_1在F_2右側，

試求P點坐標。(2 分)

試題結束