109 年度全國科學班聯合學科資格考 數學科 試題卷

第壹部分：單選題、多選題及填充題共 50 分

一、單選題：(共二題，每題 5 分，共 10 分)

說明：第 1 題至第 2 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請填至答案卷之指定欄位。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或書寫多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 若正數 a, b 滿足 $2+\log_2 a = 3+\log_3 b = \log_6(a+b)$ ，則 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=?$

(1) 96

(2) 24

(3) 48

(4) 108

(5) 36

<命題說明>對數的運算 (基本題)

<參考答案>(4)

<試題解析> 令 $2+\log_2 a = 3+\log_3 b = \log_6(a+b) = k$ ，

$$a = 2^{k-2}, b = 3^{k-3}, a+b = 6^k, \text{而} \frac{1}{a}+\frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} = \frac{6^k}{2^{k-2}\cdot 3^{k-3}} = 108$$

2. 有一個公正的骰子，即點數 $1, 2, 3, 4, 5, 6$ 每個點數出現的機率皆為 $\frac{1}{6}$，現有甲、乙、丙三人，依照甲,乙,丙,甲,乙,丙,⋯⋯這樣的順序輪流擲骰子，而甲獲勝的條件為甲丟出的點數是 6，乙獲勝的條件為乙丟出的點數是 3 或 6，丙獲勝的條件為丙丟出的點數是 2 或 4 或 6，遊戲在有一個人獲勝後就停止，設 p_1 為甲獲勝的機率，p_2 為乙獲勝的機率，p_3 為丙獲勝的機率，試問下列哪個選項是正確的？

(1) $p_1 < p_2 < p_3$

(2) $p_1 > p_2 > p_3$

(3) $p_1 = p_2 = p_3$

(4) $p_1 < p_2 = p_3$

(5) $p_1 = p_2 < p_3$

[答案]：(4)

[詳解]：(進階題)

$$p_1 = \frac{1}{6} + (\frac{5}{6}\times\frac{4}{6}\times\frac{3}{6})\times\frac{1}{6} + (\frac{5}{6}\times\frac{4}{6}\times\frac{3}{6})^2\times\frac{1}{6} + \cdots\cdots = \frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{5}{6}\times\frac{4}{6}\times\frac{3}{6}} = \frac{3}{13} ,$$

$$p_2 = \frac{5}{6}\times\frac{2}{6} + (\frac{5}{6}\times\frac{4}{6}\times\frac{3}{6})\times\frac{5}{6}\times\frac{2}{6} + (\frac{5}{6}\times\frac{4}{6}\times\frac{3}{6})^2\times\frac{5}{6}\times\frac{2}{6} + \cdots\cdots = \frac{\frac{5}{6}\times\frac{2}{6}}{1-\frac{5}{6}\times\frac{4}{6}\times\frac{3}{6}} = \frac{5}{13} ,$$

$p_3=\frac{5}{6}\times\frac{4}{6}\times\frac{3}{6}+(\frac{5}{6}\times\frac{4}{6}\times\frac{3}{6})\times\frac{5}{6}\times\frac{4}{6}\times\frac{3}{6}+(\frac{5}{6}\times\frac{4}{6}\times\frac{3}{6})^2\times\frac{5}{6}\times\frac{4}{6}\times\frac{3}{6}+\cdots\cdots=\frac{\frac{5}{6}\times\frac{4}{6}\times\frac{3}{6}}{1-\frac{5}{6}\times\frac{4}{6}\times\frac{3}{6}}=\frac{5}{13}$ 故 $p_1<p_2=p_3$。

二、多選題：(共三題，每題 5 分，共 15 分)

說明：第 3 題至第 5 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，選出正確選項，請填至答案卷之指定欄位。每題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；所有選項均未作答或答錯多於 2 個選項者，該題以零分計算。

3. 將 12 個禮物分給小科、小學、小班三人，則下列敘述哪些正確？

(1) 若禮物相異，且全部分完，則分法有 3^{12} 種

(2) 若禮物相異，且每人 4 個，則分法有 $C_4^{12}\cdot C_4^8\cdot C_4^4$ 種

(3) 若禮物相異，且有二人分到 3 個，另一人分到 6 個，則分法有 $C_3^{12}\cdot C_3^9\cdot C_6^6$ 種

(4) 若禮物相同，且全部分完，則每人至少 1 個的分法有 C_2^{11} 種

(5) 若禮物相同，可不必分完(也可以三人都不分)，則每人至多 7 個的分法有 $C_3^{15}-C_1^3\cdot C_3^7$ 種

答：(1)(2)(4)(5)
參考解法：(多選，基本題)
(3) $C_1^3\cdot\left(C_3^{12}\right)\cdot C_2^2\cdot\left(C_3^9\cdot C_6^6\right)$
(4) $H_{12-3}^3=H_9^3=C_9^{11}=C_2^{11}$
(5) $H_{12}^{3+1}-C_1^3\cdot H_{12-8}^{3+1}=H_{12}^4-C_1^3\cdot H_4^4=C_{12}^{15}-C_1^3\cdot C_4^7=C_3^{15}-C_1^3\cdot C_3^7$

4. 下列條件何者能推論出 ΔABC 是等腰三角形?

(1) sin(A+B) = 2sinAcosB

(2) cos(A+B) = 2cosAcosB

(3) sin(A+B) = sinB

(4) sin2A = sin2B

(5) cos2A = cos2B

答案：(1)(3)(5)
解析：(進階題)
(1)化簡得 sin(A－B) = 0 $\Rightarrow$ A= B
(2)反例 A=15°, B=105°, C=60°
(3)A+2B=180° $\Rightarrow$ B=C
(4)反例 A=30°, B=60°, C=90°
(5)2A=2B $\Rightarrow$ A= B

5. 若四次函數 $y=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ 的圖形如右圖，

且滿足$|\beta|<|\alpha|<|\gamma|$，則下列敘述何者正確？

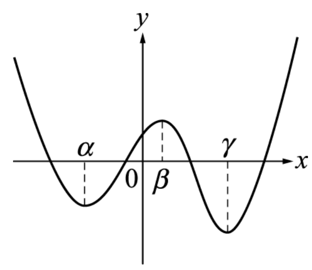
(1) $b<0$

(2) $c<0$

(3) $d<0$

(4) $3b^2-8ac>0$

(5) $4ax^3+3bx^2+2cx+d=0$ 有三個相異實根



〔**解答**〕【進階題】

令 $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ 由圖形知 $a>0$。

則 $f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d=0$

有三相異實根 α，β，γ 且由圖形知 $\alpha<0<\beta<\gamma$

$\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{3b}{4a}>0\Rightarrow b<0$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\alpha\beta+\gamma(\alpha+\beta)=\dfrac{2c}{4a}<0\Rightarrow c<0$

$\alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{4a}<0\Rightarrow d>0$。

則 $f''(x)=12ax^2+6bx+2c=0$

有二相異實根 $\Rightarrow D=3b^2-8ac>0$

因此，答案選(1) (2) (4) (5)。

三、填充題：(共五題，每題 5 分，共 25 分)

說明：第 A 題至第 E 題為填充題，將答案填至答案卷之指定欄位，每一題完全答對得 5 分，答錯不倒扣；未完全答對不給分。

A. 已知$\triangle ABC$為正三角形，邊長為2。若 $\overrightarrow{AP}=20\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ 、 $\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AB}+20\overrightarrow{AC}$ ，則$\triangle APQ$的面積為___________。

參考答案： $399\sqrt{3}$

試題解析： 基礎題

利用坐標化將A至於坐標原點，則 $B(2,0)$、$C(1,\sqrt{3})$，則$P(41,\ \sqrt{3})$、$Q(22,20\sqrt{3})$ ，$\triangle APQ$的面積為$\frac{1}{2}\times\left\|\begin{matrix}41 & \sqrt{3}\\ 22 & 20\sqrt{3}\end{matrix}\right\|=399\sqrt{3}$

B. 丟擲一個公正骰子(即點數1,2,3,4,5,6每個點數出現的機率皆為$\dfrac{1}{6}$)三次，設依序出現的點數為a,b,c，定義隨機變數X

如下：若 a 是 3 的倍數，則 $X=b+c$ ，若 a 不是 3 的倍數，則 $X=|b-c|$ ，試求 $P(X=4)$ 的值為___________。

[答案]：$\dfrac{11}{108}$

[詳解]：(基本題)

若 $b+c=4$ ，則 $(b,c)=(1,3),(2,2),(3,1)$ 共三組；若 $|b-c|=4$ ，則 $(b,c)=(6,2),(2,6),(5,1),(1,5)$ 共四組，所以

$P(X=4)=\dfrac{2}{6}\times\dfrac{3}{36}+\dfrac{4}{6}\times\dfrac{4}{36}=\dfrac{11}{108}$ 。

C. 在 xy 平面上有一個圓 C：$x^2+y^2=16$，O 為圓心，且在 y 軸上有一點 $A(0,8)$，若有一光線自 A 點射向第一象限中圓 C 上某一點 P，經反射之後平行 x 軸射出經過A'點，且 A、A'兩點對稱於$\overleftrightarrow{OP}$，試問 P 點的 y 座標為__________。

解答：

假設 $P(4\cos\theta,4\sin\theta)$，且$\overleftrightarrow{OP}$ 直線方程式為 $y=\tan\theta x$，則反射即為將 A 點對$\overleftrightarrow{OP}$ 做鏡射

且鏡射矩陣 $M_\theta=\begin{bmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta\\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{bmatrix}$

依題意，可列出 $\begin{bmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta\\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha\\4\sin\theta\end{bmatrix}\Rightarrow -8\cos 2\theta=4\sin\theta$

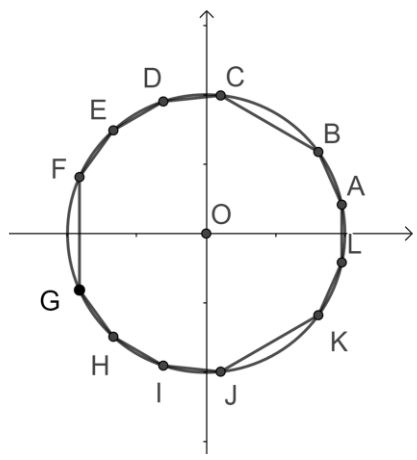
$\Rightarrow 4\sin^2\theta-\sin\theta-2=0\Rightarrow \sin\theta=\dfrac{1\pm\sqrt{33}}{8}$ (負不合)

故所求為 $\dfrac{1+\sqrt{33}}{2}$

D. 設 $\cos 24°=a$，求複數平面上以 $z^{12}-z^9+z^6-z^3+1=0$ 各根為頂點的多邊形周長__________。(以 a 表之)

答案：$18\sqrt{\dfrac{1-a}{2}}+6\sqrt{1-a^2}$

解析：(進階題)



由$(z^3+1)(z^{12}-z^9+z^6-z^3+1)=z^{15}+1$

知將 $z^{15}=-1$ 的根去掉 $z^3=-1$ 的根就得原方程式的 12 個根

以點 A,B,C,D,E,F,G,H,I,J,J,L,代表

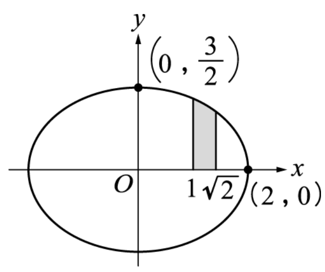
所求 $=9(\overline{AB}$ 長$)+3(\overline{BC}$ 長$)$

$=9(2\sin 12°)+3(2\sin 24°)$

$=18\sqrt{\dfrac{1-a}{2}}+6\sqrt{1-a^2}$

E. 右圖為一橢圓Γ，中心在（0，0），長軸長為 4，短軸長為 3，

試求：橢圓Γ與 $x=1$，$x=\sqrt{2}$ 及x 軸所圍成的陰影部分面積為__________。



〔**解答**〕【挑戰題】

Γ：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{\frac{9}{4}}=1\Rightarrow$ 上半為 $y=\dfrac{3}{2}\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}}=\dfrac{3}{4}\sqrt{4-x^2}$

所求為 $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}}\frac{3}{4}\sqrt{4-x^2}\,dx=\frac{3}{4}\int_1^{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}\,dx$

$=\dfrac{3}{4}\underbrace{\left(\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}\times 2^2\times\dfrac{\pi}{12}-\dfrac{1}{2}\times 1\times\sqrt{3}\right)}_{\text{如圖陰影區}}=\dfrac{3}{4}\left(1+\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{6-3\sqrt{3}+\pi}{8}$