103 年度全國科學班試辦聯合學科資格考數學科試題解答

一、單一選擇題：每題 3 分，5 題，共 15 分。

1、以 y 軸為準線，通過 $A(1,2)$，$B(4,-2)$ 兩點的拋物線有幾個？
(1) 0　(2) 1　(3) 2　(4) 3　(5) 超過 3 個。

答案：(2)

解法：設此拋物線焦點為 F

由拋物線定義可得 $\overline{AF}=d(A,y軸)=1$，$\overline{BF}=d(B,y軸)=4$

各以 A、B 為圓心，半徑分別為 1、4 畫圓，

因 $\overline{AB}=5$，得兩圓相切於 1 點，此即為 F 的位置，故滿足條件的拋物線恰 1 個。

2、設集合 $I=\{1,2,3,4,5\}$，選擇 I 的兩個非空子集合 A,B，使得 B 中的最小的數大於 A 中最大的數，

則有幾種不同的選擇方法？
(1) 50 種　(2) 49 種　(3) 48 種　(4) 47 種　(5) 46 種。

答案：(2)

解法：若 A 中最大的數為 1，則 A 有 1 種選法，B 有 $2^4-1=15$ 種
若 A 中最大的數為 2，則 A 有 2 種選法，B 有 $2^3-1=7$ 種
若 A 中最大的數為 3，則 A 有 4 種選法，B 有 $2^2-1=3$ 種
若 A 中最大的數為 4，則 A 有 8 種選法，B 有 $2-1=1$ 種
因此共有 $1\times15+2\times7+4\times3+8\times1=15+14+12+8=49$ 種

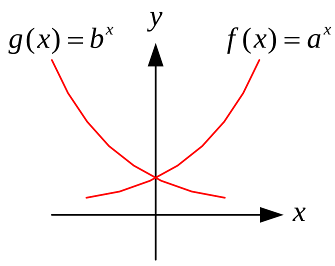
3、等比數列 $\{a_n\}$ 的一般項 $a_n=3\times2^{n-1}$，若 $S_n=a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+\cdots+a_na_{n+1}$，則 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{4^n}$ 之值為下列何者？

(1) 6　(2) 3　(3) 2　(4) $\dfrac{1}{3}$　(5) $\dfrac{1}{6}$。

答案：(1)

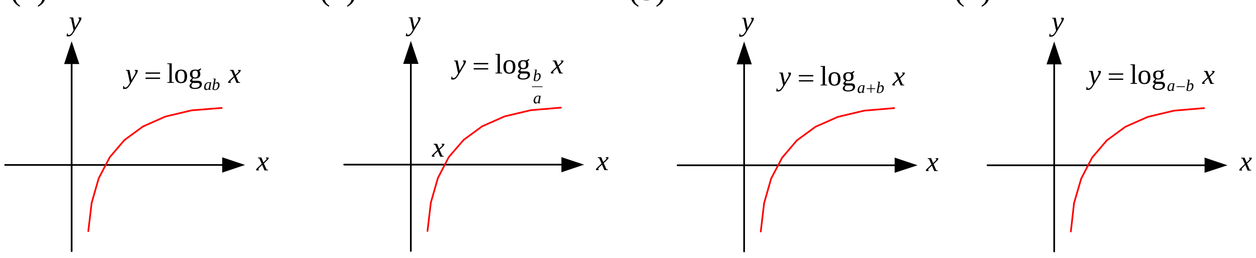
解法：$S_n=6(4^n-1)$，所求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{4^n}=6$，故選 (1)。

4、兩指數函數 $f(x)=a^x$ 與 $g(x)=b^x$ 的圖形相互對稱於 y 軸，如右圖所示，



則下列哪一個選項恆正確？

(1)　(2)　(3)　(4)



答案：(3)

解法：由圖形可知，$a>1$，$0<b<1$，$ab=1$
(1) $ab=1$，所以 $y=\log_{ab}x$ 沒有定義。
(2) $\dfrac{b}{a}<1$，所以 $y=\log_{\frac{b}{a}}x$ 為遞減圖形。
(3) $a+b>1$，所以 $y=\log_{a+b}x$ 為遞增圖形。
(3) $a-b>0$，但無法區分 $a-b>1$ 或 $0<a-b<1$，所以 $y=\log_{\frac{b}{a}}x$ 可能為遞增或遞減圖形。

5、在坐標空間中，一正立方體的八個頂點分別為(0,0,0)、(1,0,0)、(1,1,0)、(0,1,0)、(0,0,1)、(1,0,1)、(1,1,1)與(0,1,1)。試問下列那一個平面與此正立方體的截面為五邊形？

(1) $2x+2y+2z=3$
(2) $2x+2y+2z=5$
(3) $3x+y+3z=5$
(4) $3x+3y+4z=6$
(5) $3x+6y+4z=11$。

答案：(4)

解法：考慮各選項中的平面與此正立方體的稜之交點，藉此判別截面是那一種多邊形。

選項(1)：$(\frac{1}{2},0,1)$、$(1,0,\frac{1}{2})$、$(1,\frac{1}{2},0)$、$(\frac{1}{2},1,0)$、$(0,1,\frac{1}{2})$、$(0,\frac{1}{2},1)$，故為六邊形。

選項(2)：$(\frac{1}{2},1,1)$、$(1,\frac{1}{2},1)$、$(1,1,\frac{1}{2})$，故為三角形。

選項(3)：$(1,0,\frac{2}{3})$、$(\frac{2}{3},0,1)$、$(1,1,\frac{1}{3})$、$(\frac{1}{3},1,1)$，故為四邊形。

選項(4)：$(\frac{2}{3},0,1)$、$(0,\frac{2}{3},1)$、$(1,0,\frac{3}{4})$、$(0,1,\frac{3}{4})$、$(1,1,0)$，故為五邊形。

選項(5)：$(\frac{1}{3},1,1)$、$(1,\frac{2}{3},1)$、$(1,1,\frac{1}{2})$，故為三角形。