

國立嘉義高級中學 107 學年度科學班甄選入學實驗實作  
科學實驗實作(一)數學科試題

\* 本試卷有 4 大題，都是問答題或證明題，將依你答題的嚴謹性與完整性評分，請在答案卷上有條理的作答。

1. 如右圖標示，已知兩線段長分別為  $a$  和  $b$ 。

\_\_\_\_\_  $a$

(1) 請用尺規作出長度為  $\sqrt{ab}$  的線段，寫出作法並證明。(10 分)

\_\_\_\_\_  $b$

(2) 請利用尺規作圖找出(1)所作出的線段上的黃金切割點，寫出作法並證明。(10 分)

2. (1) 請敘述畢氏定理(或稱商高定理)。(4 分)

(2) 請用三種不同的方法證明畢氏定理。(21 分)

3. 如果一個無限集合中的元素，能與自然數做一對一的對應，亦即可以依序排列成一個數列

$\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$ ，我們就稱這種無限集合為可數集合。

(1) 利用上面可數集合的定義，證明整數集合是可數集合。(8 分)

(2) 說明什麼是有理數，並證明有理數集合也是可數集合。(8 分)

(3) 證明 $\sqrt{2}$  是無理數。無理數比有理數多嗎？為什麼？(8 分)

4. 假設  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  為  $n$  個正實數，則他們的算術平均數為  $A_n = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n}$ ，幾何平均

數為  $G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}$ ，而調和平均數為  $H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n}}$ 。

(1) 證明  $A_n \geq G_n$  對所有的  $n = 2^k, k = 1, 2, 3, \dots$  都成立。(10 分)

(2) 證明  $A_3 \geq G_3$ 。(7 分)

(3) 證明  $A_n \geq G_n$  對所有  $n = 2, 3, 4, \dots$  都成立。(7 分)

(4) 利用(3)的結論證明  $G_n \geq H_n$  對所有  $n = 2, 3, 4, \dots$  都成立。(7 分)