

105 年度全國科學班試辦聯合學科資格考 數學科試題卷

範圍:99 課綱 1-4 冊 B 版及數甲 I, II 冊全

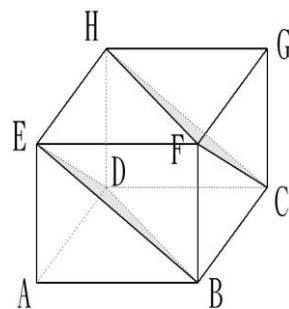
第壹部分: 單選題、多選題及填充題共占 50 分

一、單選題:(共三題, 每題 5 分, 共計 15 分)

說明: 第 1 題至第 2 題, 每題有 5 個選項, 其中只有一個是正確或最適當的選項, 請填至答案卷之指定欄位。各題答對者, 得 5 分; 答錯、未作答或書寫多於一個選項者, 該題以零分計算。

1. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 60^\circ$, 且最大邊與最小邊長為方程式 $3x^2 - 21x + 13 = 0$ 之兩根, 則 $\triangle ABC$ 之外接圓半徑為?
 (A) $2\sqrt{2}$ (B) $2\sqrt{3}$ (C) 4 (D) $2\sqrt{5}$ (E) $2\sqrt{6}$

2. 已知 $ABCD-EFGH$ 為正方體, \overline{AG} 交平面 BDE 與平面 CFH 於 P 、 Q , 而 \overline{PQ} 的長為 \overline{AG} 的 k 倍, 則 k 的值为?
 (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (E) $\sqrt{2}$



3. 多項函數 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a > 0$ 。若 $y = f(x)$ 和直線 $y = 2$ 的交點有三個, 三個交點的 x 座標分別為 -1 、 0 、 1 , 且 $y = f(x)$ 和直線 $y = 2$ 所圍的區域繞直線 $y = 2$ 旋轉所得的旋轉體體積為 $\frac{192}{35}\pi$, 則下列哪一個選項是正確的?
 (A) $a = 2$ (B) $c = -3$ (C) $a + b = 4$ (D) $b + c = -5$ (E) $2a + c = 6$

二、多選題:(共三題, 每題 5 分, 共計 15 分)

說明: 第 3 題至第 5 題, 每題有 5 個選項, 其中至少有一個是正確的選項, 選出正確選項, 請填至答案卷之指定欄位。每題之選項獨立判定, 所有選項均答對者, 得 5 分; 答錯 1 個選項者, 得 3 分; 答錯 2 個選項者, 得 1 分; 所有選項均未作答或答錯多於 2 個選項者, 該題以零分計算。

1. 設點 $P(u, v)$ 、 $Q(m, n)$ 分別是圓 $x^2 + y^2 = 1$ 、 $(x-4)^2 + y^2 = 4$ 上的動點, 試問下列敘述哪些是正確的?

(A) $3m + 4n$ 的最小值為 2

(B) 行列式 $\begin{vmatrix} u & v \\ m & n \end{vmatrix}$ 的最大值為 6

(C) 聯立方程組 $\begin{cases} ux + vy = 3 \\ mx + ny = 4 \end{cases}$ 一定有解。

(D) 設 $\vec{c} = (6, 7)$ 一定可以表示成 \vec{OP} 、 \vec{OQ} 的線性組合

(E) $um + vn$ 最小值為 0。

2. $\triangle ABC$ 中, P 為內部一點, 且滿足 $3\overline{AB} + 5\overline{PA} + 4\overline{PC} = \vec{0}$, 則下列哪些選項是正確的?

(A) P 為 $\triangle ABC$ 之重心

(B) $\triangle BPC$ 的面積: $\triangle CPA$ 的面積 = 2:5

(C) 若延伸 \overline{AP} 交 \overline{BC} 於 D , 則 $\overline{AD} = \frac{3}{7}\overline{AB} + \frac{4}{7}\overline{AC}$

(D) $\overline{BP} = \frac{4}{9}\overline{BA} + \frac{2}{9}\overline{BC}$

(E) $\triangle ABC$ 的面積 = $\frac{9}{4}\triangle APB$ 的面積

3. 若方程組 $\begin{cases} x-y+z=a \\ 2x-3y+3z=b \\ y-z=c \end{cases}$ 有解，且 a, b, c 為實數，則下列敘述何者正確？

- (A) $a=-2, b=1, c=1$ (B) a 為 b 與 c 的算術平均數 (C) 此方程組有唯一解
 (D) 此方程組有無限多組解 (E) 此方程組有幾組解，端視 a, b, c 之值而定。

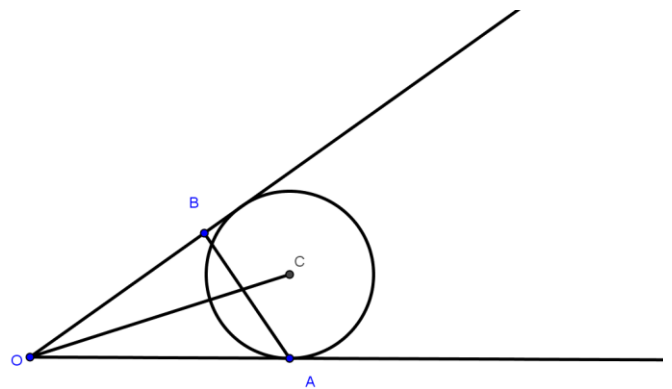
三、填充題：(共四題，每題 5 分，共計 20 分)

說明：第 A 題至第 D 題為填充題，將答案填至答案卷之指定欄位，每一題完全答對得 5 分，答錯不倒扣；未完全答對不給分。

A. 設某實數 $\sqrt{2+\sqrt{3+2\sqrt{5+12\sqrt{3+2\sqrt{2}}}}}$ 的整數部分為 a ，小數部分為 b ，則 $a^2+2ab=$ _____。

B. 若甲乙丙丁...共 9 個人排隊成一列，已知甲、乙要排在第 2、3、4 位的其中兩位，而丙與丁要排在第 5、6、7 位的其中兩位，請問此 9 人可以排出幾種不同的順序_____。

C. 如下圖，在 $\triangle OAB$ 中，已知 $|\vec{OA}|=3, |\vec{OB}|=2, \cos(\angle AOB)=\frac{2}{3}$ ，直線 OA 切圓 C 於 A 點，已知 C 為 $\angle AOB$ 的平分線，令 $\vec{OC}=x \vec{OA}+y \vec{OB}$ ，試求 $(x,y)=$ _____。



D. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B$ 的平分線 \vec{BE} 與 \vec{BC} 邊的中線 \vec{AD} 垂直且等長，已知 $BE = AD = 4$ ，試求此三角形之周長。

第貳部分：非選擇題(數學寫作能力、計算證明題共占 50 分)

說明：本部份共有兩大題證明題及四題計算題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明題號(1、2)與子題號((1)、(2)、(3))，同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分。務必使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。每題配分標於題末。

四、數學寫作能力：(兩題，共計 20 分)

1. 試敘述在排列組合單元中的「巴斯卡定理」，並加以證明。(10 分)

2. 試敘述棣美弗定理，並證明之。(10 分)

五、計算證明題：(四題，共計 30 分)

1. 已知指數函數 $f(x) = 2^x$ ，若 $g(x)$ 為二次多項式，且滿足 $f(0) = g(0)$ ， $f(1) = g(1)$ ， $f(2) = g(2)$ ，試回答下列問題：

(1) 利用二次插值公式求出 $g(x)$ ，答案須展開後以降冪排列表示。(3 分)

(2) 我們可以利用 $g(\sqrt{2})$ 求出 $f(\sqrt{2})$ 的近似值且誤差值很小，已知 $2^{\sqrt{2}} \approx 2.665$ ， $\sqrt{2} \approx 1.414$ ，

試求誤差值 $|f(\sqrt{2}) - g(\sqrt{2})|$ (求到小數點以下第二位，第三位四捨五入)。(3 分)

2. 將 $\begin{cases} a_n = a_{n-1} - 2b_{n-1} \\ b_n = a_{n-1} + 4b_{n-1} \end{cases}$ 表為 $\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{bmatrix}$ ，其中 A 為二階方陣，若 $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ ，

(1) 求 $P^{-1}AP$ (2 分) (2) 求 A^n (2 分) (3) 對於數列 $\langle a_n \rangle$ 、 $\langle b_n \rangle$ ，已知 $a_1 = 1$ ， $b_1 = 1$ ，求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ 。(4 分)

3. 已知函數 $f(x) = a \sin x + b \cos x + c$ ($0 \leq x < 2\pi$) 的最大值為 5，最小值為 1，且最大值發生在 $x = \frac{11\pi}{6}$ 時，試求 a, b, c 之值。(8 分)

4. 若存在三個相異實數 k 使得 $y = kx + 3$ 與 $y = 2x^3 - 6x^2 + a$ 相切，求實數 a 的範圍。(8 分)

試題結束