

104 年度全國科學班聯合學科資格考 數學科試題

範圍：99 課綱 1~4 冊 B 版及數甲 I、II 冊全

第壹部分：選擇題(單選題、多選題及填充題共占 52 分)

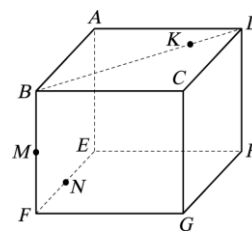
一、單選題：(共兩題，每題 5 分，共計 10 分)

說明：第 1 題至第 2 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請填至在答案卷之指定欄位。各題答對者，得 5 分；未作答或答錯、漏選項者，該題以零分計算。

1. 化簡 $\frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^2+4^2} + \frac{7}{2^2+4^2+6^2} + \dots + \frac{19}{2^2+4^2+6^2+\dots+18^2} =$

- (A) $\frac{21}{10}$ (B) $\frac{27}{20}$ (C) $\frac{40}{33}$ (D) $\frac{9}{10}$ (E) $\frac{6}{5}$.

2. 如右圖所示，立方體 $ABCD-EFGH$ 的稜長等於 4 (即 $\overline{AB} = 4$)， $\overline{BK} : \overline{KD} = 3 : 1$ ，



M 為 \overline{BF} 與 \overline{EF} 的中點，求內積 $\overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{MF} = ?$

- (A) 2 (B) -2 (C) 4 (D) -4 (E) 8.

二、多選題：(共兩題，每題 6 分，共計 12 分)

說明：第 3 題至第 4 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，選出正確選項，請填至在答案卷之指定欄位。每題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 6 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；所有選項均未作答或答錯多於 2 個選項者，該題以零分計算。

3. 氣溫隨高度不同而改變，為了研究高度對氣溫的影響，經過實地測量得到資料如下：

$(1, 14), (1.5, 11), (2, 7.5), (2.5, 4), (3, 1.5)$ ，其中測量單位分別為公里和攝氏溫度。將此筆資料的相關係數記為 r ，以最小平方方法決定直線斜率記為 m 。現將單位轉換為哩 (一公里約等於 0.6215 哩) 及華氏溫度 (攝氏 x 度等於華氏 $\frac{9}{5}x + 32$ 度)，若單位換算後該資料的相關係數記為 r' ，以最小平方方法決定的直線斜率記為 m' 。下列關係有哪些是正確的？

- (A) $rm > 0$ (B) $r > 0$ (C) $r = r'$ (D) $m' > 0$ (E) $m = m'$ 。

4. O 為複數平面之原點， $A(z_1)$ 、 $B(z_2)$ 及 $C(z_3)$ 為複數平面上三點。若 $|z_1| = 5, |z_2| = 3$ ， $\frac{z_1}{z_2}$ 的主幅角 $\text{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{\pi}{3}$ ， $\frac{z_3}{z_2}$ 的

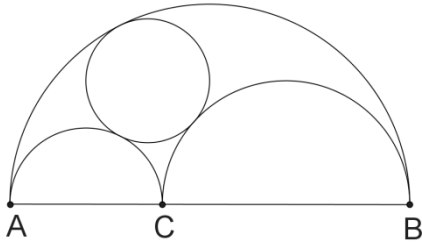
主幅角 $\text{Arg}\left(\frac{z_3}{z_2}\right) = \frac{\pi}{6}$ 。請選出正確的選項：

- (A) \overline{AB} 之長 $= \sqrt{17}$ 。
 (B) \overline{OC} 之長 $= \frac{15\sqrt{3}}{4}$ 。
 (C) $\triangle OAB$ 的外接圓半徑 $= \frac{\sqrt{57}}{3}$ 。
 (D) O 到 \overline{AB} 最近的距離 $= \frac{15\sqrt{57}}{19}$ 。
 (E) $|z_1 + z_2| = 7$ 。

三、填充題：(共五題，每題 6 分，共計 30 分)

說明：第 A. 題至第 E. 題為填充題，將答案填至在答案卷之指定欄位。每一題完全答對得 6 分，答錯不倒扣；未完全答對不給分。

- A. 已知線段 AB 上有一點 C ，且 $\overline{AC}=2$ ， $\overline{CB}=4$ ；分別以 \overline{AC} 、 \overline{BC} 、 \overline{AB} 為直徑往同側作半圓，又在其中做一個圓與兩個小半圓外切，且與大半圓內切；若此圓半徑化為最簡分數後為 $\frac{n}{m}$ ，求 $m+n=$ _____。



- B. 今有 A 、 B 、 C 、 D 、 E 、 F 、 G 、 H 共八人排成一列，觀察 A 、 B 、 C 三人的相對位置，試求 B 排在 A 、 C 之間（可不相鄰）且 F 、 G 、 H 不相鄰的情形共有_____種
- C. 已知 $\triangle ABC$ 的三邊長分別為 $\overline{AB}=5$ ， $\overline{BC}=6$ ， $\overline{CA}=7$ ， P 為 $\triangle ABC$ 內部一點。設點 P 到 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CA} 三邊的距離分別為 x 、 y 、 z ，求 $\frac{5}{x} + \frac{6}{y} + \frac{7}{z}$ 的最小值為_____。
- D. 設方程式 $x^5 + x^4 - 10x^3 - 10x^2 + x - a = 0$ ，有一根為 $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ ，則實數 a 之值為_____。
- E. 若 a 、 b 、 c 、 k 為實數， $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + c$ ，已知 $f(x)$ 在 $x=k$ 與 $x = -\frac{1}{k}$ 處均有極值，則 $f(1) - f(-1)$ 的值為_____。

第貳部分：非選擇題(數學寫作能力、計算證明題共占 48 分)

說明：本部份共有兩大題證明題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明題號(1、2)與子題號((1)、(2)、(3))，同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分。務必使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。每題配分標於題末。

四、數學寫作能力：(兩題，共計 16 分)

- 試敘述何謂二項分布?(3 分)並證明隨機變數 X 遵循參數為 n, p 的二項分布之平均數 $\mu_x = np$ 。(5 分)
- 試將中心在原點，焦點在 $F_1(c, 0)$ 與 $F_2(-c, 0)$ ，實軸長為 $2a$ ，共軛軸長 $2b$ 的雙曲線方程式，整理成雙曲線的標準式。(8 分)

五、計算證明題：(四題，共計 32 分)

說明：本部份共有四大題計算證明題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號號(3、4、5、6)寫出演算過程或理由，否則將予扣分。務必使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。每題配分標於題末。

3. 某汽車公司有 A、B 二廠生產同規格汽車，其每天產能分別為 15 輛及 20 輛，該公司二經銷站 M、N，每日需求分別為 10 輛及 25 輛，公司欲擬最佳運輸計劃，使每日總運費最低；其中每輛車運費為：由 A 廠至 M 站 150 元，A 廠至 N 站 200 元，B 廠至 M 站 200 元，B 廠至 N 站 100 元；則其最低總運費為何？(8 分)
4. 有兩個城市，A 城市有 20% 的人為商人，20% 的人為農人，40% 的人為工人，20% 的人為其他工作，B 城市有 30% 的人為商人，20% 的人為農人，30% 的人為工人，20% 的人為其他工作，兩個城市的人口比例為 2:1，每過一年 A 城市的人各行業皆有 $\frac{1}{2}$ 會搬去 B 城市並且不會改變工作，B 城市的人各行業皆有 $\frac{1}{3}$ 會搬去 A 城市並且不會改變工作。
(1) 兩年後兩城市的人口比例為？(4 分) (2) 兩年後 A 城市的商人佔 A 城市人口多少比例？(4 分)
5. 設正四面體的四個頂點為 A、B、C、D，各稜長為 1 米，今有一螞蟻從 A 點出發，按以下規則前進：每次依相同速率至其他頂點，且選擇其他各頂點的機率均相同，設 a_n 表此一螞蟻爬了 n 米後恰好到達 A 點的機率，求
(1) a_2 及 a_3 。(各 2 分) (2) a_n 的遞迴關係式， $n \geq 1$ 。(3 分) (3) a_n 的一般式。(3 分)
6. 空間中兩直線 $L_1: \frac{x}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+2}{2}$ ， $L_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-4}{2}$ ，若直線 M 過 $O(0, 0, 0)$ 且和 L_1 、 L_2 分別交於 A、B 兩點，求 $\overline{AB} = ?$ (8 分)

試題結束