

108 年度全國科學班聯合學科資格考 數學 科試題卷

一、 單一選擇題：(其中只有一個是正確或最適當的選項，答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算)

1. 空間中，設點 $A(3,3,0)$ ， $B(3,0,3)$ ， $C(0,3,3)$ ， $P(4,5,6)$ ， $Q(13,-14,15)$ ， $R(\log_2 \frac{1}{3}, \log_3 1, \log_4 \frac{1}{5})$ ，令四面體 $P-ABC$ 體積為 p ，四面體 $Q-ABC$ 體積為 q ，四面體 $R-ABC$ 體積為 r ，請選出下列對於 p, q, r 大小關係的敘述正確的選項。

- (1) $p > q > r$
- (2) $q > p > r$
- (3) $r > q > p$
- (4) $p > r > q$
- (5) $r > p > q$

2. 已知一雙曲線 $\Gamma_1 : \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ ，則下列關於此雙曲線的敘述何者正確？

- (1) 雙曲線 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = t$ ($t > 0$) 的貫軸長為 Γ_1 貫軸長的 t 倍
- (2) Γ_1 與橢圓 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 有相同的焦點
- (3) 此雙曲線上任一點到兩漸近線的乘積為 $\frac{36}{13}$
- (4) 若 $P(x, y)$ 為 Γ_1 上的一點， F_1, F_2 為其焦點，則 $\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = 4$
- (5) 已知 Γ_2 與 Γ_1 有相同漸近線且 Γ_2 的貫軸平行 y 軸，則 Γ_2 為 Γ_1 的共軛雙曲線。

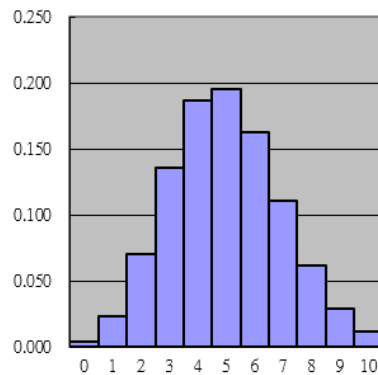
二、 多重選擇題：(其中至少有一個是正確的選項，各題之選項獨立判定，所有選項均答對者得 5 分；答錯 1 個選項者得 3 分；答錯 2 個選項者得 1 分；答錯 3 個選項以上者或所有選項均未作答者得 0 分)

1. 設 $f(x) = \log_{10} \sqrt{x^2 + 1}$ ，則下列敘述何者正確？

- (1) y 軸為 $y = f(x)$ 的漸近線
- (2) $f(x)$ 為偶函數
- (3) $y = f(x)$ 有最小值
- (4) $f(\cot 50^\circ) > 0.16$
- (5) $f(3)$ 是有理數

2. 已知右圖為某一個二項分布直方圖的局部，則下列哪些選項正確？

- (1) 這個二項分布成功的機率為 0.5
- (2) 這個二項分布實驗的總次數恰為 10 次
- (3) 這個二項分布有可能是 $B(10, 0.4)$
- (4) 這個二項分布成功的期望值有可能是 5
- (5) 這個二項分布有可能是 $B(25, 0.2)$



3. 方程式 $z^6 + z^4 + z^2 + 1 = 0$ 的六個複數根，設其在複數平面上第一象限的根為 z_1 ，並且依照逆時針方向順序將剩下五個根用 z_2, z_3, z_4, z_5, z_6 表示。令 $z_k = a_k + b_k i$ ， a_k, b_k 皆為實數， $i = \sqrt{-1}$ ， $k = 1, 2, \dots, 6$ ，且設集合

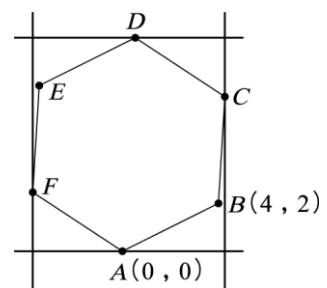
$S = \{3a_k + b_k \mid k = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 。試問下列敘述何者正確？

- (1) 方程式 $z^6 + z^4 + z^2 + 1 = 0$ 的六個複數根都不是實數根
- (2) 集合 S 中的每個元素都不是有理數。
- (3) S 中最大的元素是 3
- (4) 設 $i \cdot z_2 = c_2 + d_2 i$ ，其中 c_2, d_2 皆為實數，則 $3c_2 + d_2$ 屬於 S
- (5) 設 $i \cdot z_4 = c_4 + d_4 i$ ，其中 c_4, d_4 皆為實數，則 $3c_4 + d_4$ 屬於 S 。

三、 填充題：(每題 5 分)

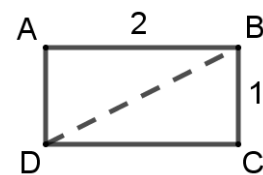
1. $\triangle ABC$ 中，已知 $\overline{AB} = \overline{AC} = 13$ ， $\overline{BC} = 10$ 。設 P 為 $\triangle ABC$ 內部一點，滿足 $\overline{PB} = 8$ 且 $\overline{PC} = 6$ ，則 $\triangle PAB$ 面積與 $\triangle PAC$ 面積的比值為_____。

2. 如圖，正六邊形 $ABCDEF$ 被圍在以平行 x 軸與 y 軸為邊的矩形內，其中矩形四邊各交此正六邊形於一點，則此矩形的面積為_____。



3. 已知方程式 $x^2 - |2x+3| + 4x + k = 0$ 有四個相異實根，則實數 k 的範圍為_____。

4. 如右圖，邊長 $\overline{AB} = 2$ ， $\overline{BC} = 1$ 的矩形 $ABCD$ ，若將其沿 \overline{BD} 摺起，使得 $\triangle ABD$ 與 $\triangle CBD$ 兩個三角形的夾角為 120° ，此時 $\overline{AC} =$ _____。

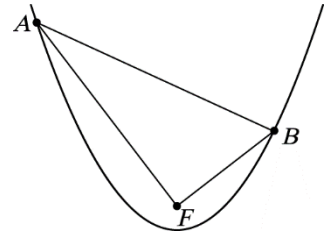


5. 持續投擲一公正骰子最多 5 次，若連續兩次擲出的點數相同則立即停止，或擲滿 5 次也須停止，則一連串擲骰子的所有可能結果的總數為_____。

四、計算與證明：(每題 8 分)

1. 已知三次實係數多項式函數 $y = f(x)$ 的圖形與某一直線交於相異三點 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$, $(c, f(c))$ ，
試證明：函數 $y = f(x)$ 圖形的反曲點坐標為 $(\frac{a+b+c}{3}, f(\frac{a+b+c}{3}))$ 。

2. 右圖是一拋物線的部分圖形，其中 F 為其焦點，在此拋物線上有相異兩點 A 、 B ，
使得 F 在 \overline{AB} 與此拋物線所圍內部區域，已知 $\overline{AF} = 10$ ， $\overline{BF} = 5$ ， $\overline{AB} = 5\sqrt{5}$ ，試求
此拋物線正焦弦的長度。



3. 平面上，已知直線 $L: x = 2$ 將圓 $C: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 8$ 分為兩部分，其中面積較小的部分將其以 L 為摺線對摺，
對摺後的圓周恰與直線 L' 相切。若 L' 通過點 $(-3, 0)$ ，試求直線 L' 的方程式。

4. 空間中一光束由點 $A(-2, -2, 1)$ 射向 xy 平面上一點 $P(a, b, 0)$ ，經 xy 平面反射後射向平面 $E: x + y + z = 0$ ，
再經 E 反射後，又回到點 $A(-2, -2, 1)$ ，試求 P 點座標。

5. 設 k 為實數，若函數 $f(x) = \log_2(x+k)$ 且 $f(0)$, $f(2)$, $f(6)$ 成等差數列，則：
(1) 求 k 值，
(2) 設三相異正數 a, b, c 成等比數列，試證： $f(a) + f(c) > 2f(b)$ 。

五、數學寫作能力題：(每題 5 分，共計 10 分)

1. 二項分配之定義是：一個隨機實驗可不斷重複進行，每一次出現的結果只有兩種，成功與失敗（成功的機率為 p ，
失敗的機率為 $1-p$ ），且實驗前後結果互不影響，稱之為伯努力實驗。所謂的二項分配之定義是 n 次的伯努力實驗
中，成功的總次數；而二項分配之機率函數是 n 次的伯努力實驗中，成功 k 次的機率，其中 $0 \leq k \leq n$ 。

- (1) 請寫出二項分配之機率函數。(1 分，寫出答案即可)
(2) 請寫出二項分配之期望值，並使用 \sum 的符號推導此結果。(4 分)

2. 如圖，假設直線 L 過原點且與 x 軸夾 θ 角，

- (1) 若平面上對直線 L 鏡射的線性轉換所對應的二階方陣為 A ，
請以 θ 表示方陣 A 。(1 分，寫出答案即可)

- (2) 假設平面向量 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ，對直線 L 鏡射後得到向量 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ ，請證明：

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \text{。 (4 分，其中方陣 } A \text{ 是本題 (1) 小題的答案)}$$

