國立嘉義高級中學110學年度科學班甄選入學實驗實作

數學科實驗實作參考解答

1.

(a)

		8	a	x	8	a	x	8	a	x	8	5			

設第四格為數字 a，因任意相鄰三個數字的和是 17(也就是

$8+a+x=17, a+x+8=17, x+8+a=17$)，所以依序往右填寫，可得 $x=4$。

(b) $a=8,\ b=5,\ c=7,\ d=1,\ e=4$，所以 $a+b+c+d+e=25$。

2.

(a) $x=18, y=6$

(b) 設最小的正整數為 x，則 100 個連續正整數和為 $(x+x+99)\times 100\div 2$。所以

$$8000\le(2x+99)\times 50\le 8100$$

我們可得 $x=31$。

(c) 設餘式 $ax+b$，則

$$x^{64}+2x^2+5=(x^2-1)\cdot p(x)+(ax+b)\quad (*)$$

其中 $p(x)$ 是某一個多項式。

分別把 $x=1, x=-1$ 帶入(*)，可得以下結果

$$\begin{cases} a+b=8 \\ -a+b=8 \end{cases}$$

則 $a=0, b=8$，所以餘式為 8。

3.

首先觀察因為對所有自然數 n，$\frac{1}{2}+\frac{1}{n}>\frac{7}{17}$，所以 m,n 均不可能是 1 或 2。因為 $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}<\frac{7}{17}$ 且對所有 m,n 大於或等於 5, $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\le\frac{1}{5}+\frac{1}{5}<\frac{7}{17}$，所以 m,n 至少有一個小於 5。綜合以上，m,n 其中一個必須是 3 或 4。但 $\frac{7}{17}-\frac{1}{3}=\frac{4}{51}$ 且對所有自然數 n，$\frac{4}{51}\ne\frac{1}{n}$。$\frac{7}{17}-\frac{1}{4}=\frac{11}{68}$ 且對所有自然數 n，$\frac{11}{68}\ne\frac{1}{n}$。

4.

(a) 簡略說明如下：有極限值，因為$a_1=\sqrt{2}<2$，所以$a_2=\sqrt{2+a_1}<2$。假設$a_n<2$，可得$a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}<2$。可歸納出對所有自然數n，$0<a_n<2$。由當$0\le x\le 2$，$(\sqrt{2+x}-x)(\sqrt{2+x}+x)=2+x-x^2\ge 0$，可得對所有自然數$n$，$a_n\le a_{n+1}$。根據定理 1，此數列有極限值$a^*$。因為$a^*>0$滿足$a^*=\sqrt{2+a^*}$，所以$a^*=2$。

(b) 簡略說明如下：因為對所有自然數n，$a_{n+1}\cdot b_{n+1}=a_n\cdot b_n$且$a_n\ge b_n$，

所以$a_{n+1}\le a_n$，$b_n\le b_{n+1}$。此數列$\{b_1,b_2,\dots,b_n,\dots\}$為遞增數列且有上界$a_1$，所以數列$\{b_1,b_2,\dots,b_n,\dots\}$有極限值$b^*$。

觀察另一數列$\{-a_1,-a_2,\dots,-a_n,\dots\}$，此數列為遞增數列且有上界$-b_1$，所以數列$\{-a_1,-a_2,\dots,-a_n,\dots\}$有極限值$-a^*$，則數列$\{a_1,a_2,\dots,a_n,\dots\}$有極限值$a^*$。

因為a^*與b^*滿足$a^*=\dfrac{a^*+b^*}{2}$與$a_1\cdot b_1=a^*\cdot b^*$，所以$a^*=b^*=\sqrt{a_1\cdot b_1}$。