

106年度全國科學班聯合學科資格考數學科試題卷

範圍:99課綱1-4冊B版及數甲I, II冊全

第壹部分:單選題、多選題及填充題共占50分

一、單選題:(共2題,每題5分,共計10分)

說明:第1題至第2題,每題有5個選項,其中只有一個是正確或最適當的選項,請填至答案卷之指定欄位。各題答對者,得5分;答錯、未作答或書寫多於一個選項者,該題以零分計算。

1. 變數 X 與 $Y_1 \sim Y_5$ 對應關係如下表,且 X 與 $Y_1 \sim Y_5$ 的相關係數分別為 $r_1 \sim r_5$,則下列敘述何者錯誤?

X	1	-2	3	-4	5
Y_1	2	-4	6	-8	10
Y_2	1	-5	5	-9	9
Y_3	-2	4	-6	8	-9
Y_4	-3	6	-9	12	-14
Y_5	1	1	1	1	1

- (A) $r_1 = 1$
- (B) $r_1 = r_2$
- (C) $r_2 > r_3$
- (D) $r_3 < r_4$
- (E) $r_4 < r_5$
2. 已知 a 、 b 、 c 、 d 分別為方程式 $2^x + x = 5$ 、 $3^x + x = 5$ 、 $\log_2 x + x = 5$ 、 $\log_3 x + x = 5$ 的根,則 a 、 b 、 c 、 d 之大小關係,則下列何者正確?
- (A) $a > b > c > d$
- (B) $c > d > a > b$
- (C) $d > c > b > a$
- (D) $d > c > a > b$
- (E) $a > b > d > c$

二、多選題：（共三題，每題5分，共計15分）

說明：第3題至第5題，每題有5個選項，其中至少有一個是正確的選項，選出正確選項，請填至答案卷之指定欄位。每題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得5分；答錯1個選項者，得3分；答錯2個選項者，得1分；所有選項均未作答或答錯多於2個選項者，該題以零分計算。

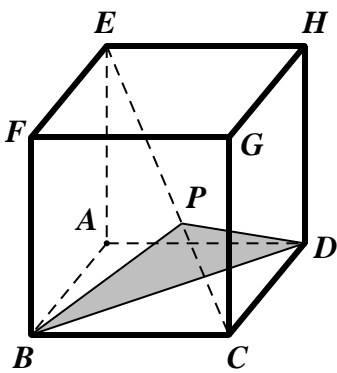
3. 已知 $1+3i$ 是實係數方程式 $f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 + ax + b = 0$ 的一根，則下列敘述哪些正確？
- (A) $f(1-3i) = 0$
- (B) 多項式 $f(x)$ 被 $x^2 - 2x + 10$ 整除
- (C) $f(x) = 0$ 沒有實根
- (D) $a - b = 58$
- (E) $f(3x^2) > 0$ 的解為 $-1 < x < 1$
4. 下列哪些條件必使得 $\triangle ABC$ 為鈍角三角形？
- (A) $\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C < 0$
- (B) $\sin^2 A > \sin^2 B + \sin^2 C$
- (C) $\cos A = \frac{1}{2}$ 且 $\cos B = \frac{1}{3}$
- (D) $\tan A = \frac{1}{2}$ 且 $\tan B = \frac{1}{3}$
- (E) $\sin A \sin B < \cos A \cos B$
5. 設甲袋有100元鈔票兩張，乙袋有50元硬幣3枚。今自甲、乙兩袋隨機各取一個交換，稱為一局，則長期交換的過程中，則下列敘述哪些正確？
- (A) 當甲袋總金額為150元時，經一局交換後使其總金額保持150元的機率為 $\frac{1}{3}$
- (B) 當甲袋總金額為150元時，經一局交換後使其總金額變為100元的機率為 $\frac{1}{2}$
- (C) 第三局結束時，甲袋總金額為200元、150元、100元的機率分別為 $\frac{3}{36}$, $\frac{23}{36}$, $\frac{10}{36}$
- (D) 第三局結束時，乙袋總金額的期望值為 $\frac{3775}{18}$ 元
- (E) 依此長期交換穩定後，甲袋總金額的期望值為150元

三、填充題

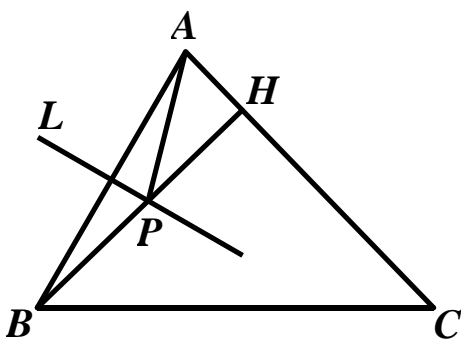
說明：第A至E題請將答案寫在答案卷之「填充題」答案欄上，每題完全答對得5分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。共25分。

- A. 一個不透明的箱子中有10顆球，編號1至10，若從此箱中任意抽取3顆球，在抽中的球有一個是8號球的條件下，則所抽中的球號任兩顆皆未出現連續數的機率為_____。

- B. 如下圖所示，邊長1的單位正立方體 $ABCD-EFGH$ ，在對角線 CE 上取一點 P ，則 $\triangle PBD$ 面積的最小值為_____。

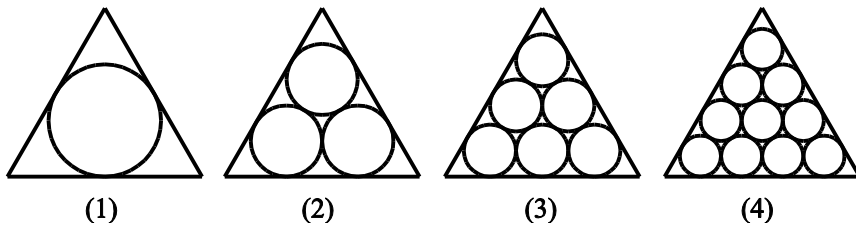


- C. 如下圖， $\triangle ABC$ 中 $\overline{AB}=4$ 、 $\overline{BC}=6$ 、 $\overline{AC}=5$ ，已知 \overline{AB} 中垂線 L 與邊 \overline{AC} 上的高 \overline{BH} 相交於點 P ，若 $\overrightarrow{AP}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$ ，則 $\alpha-5\beta=_____$ 。



五、計算證明題：(四題，共計 30 分)

1. 在下圖中，第 n 圖的正三角形內，每一邊都有 n 個相切的圓；已知每一圖形的三角形都是邊長為 1 的正三角形，三角形內的圓半徑皆相等，相鄰的圓皆外切，且外圍的圓與正三角形的邊皆相切。



設第 n 圖中的每一個圓的半徑皆為 r_n ，所有圓的面積和為 S_n ，試回答下列問題。

(1) 求 r_3 。(2 分)

(2) 若 $r_n = \frac{1}{an+b+c\sqrt{3}}$ ，求整數 $a+b+c$ 的值。(3 分)

(3) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\pi}$ 。(3 分)

2. 設 a, b 為兩正數，直線 $y = ax$ 與拋物線 $y = x(x-b)$ 所圍之圖形面積恰被 x 軸平分，試求 $\frac{(a+b)^3}{b^3}$ 之值。(7 分)

3. k, m 為實數，已知一平面上的線性變換，其作用為「先沿著 x 軸方向推移 y 坐標的 k 倍，再對直線 $y = mx$ 作鏡射」，

且其對應的矩陣為 $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 3 \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$ ，試求 $4k+m$ 之值。(6 分)

4. 已知 z_1, z_2 為複數，且 $|z_1| = |z_1 - z_2| = \frac{1}{\sqrt{2}}|z_2| = 1$ ，試求 $|z_1 - 1|^2 + |z_2 - 1|^2$ 的最小值。(9 分)

試題結束