110 年度全國科學班聯合學科資格考 **數學科** 試題卷

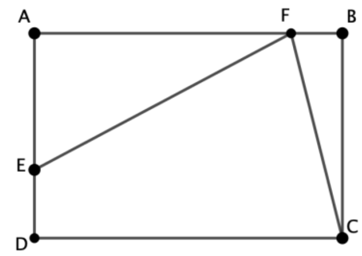
第壹部分：單選題、多選題及填充題，共 50 分。

一、單選題：(共二題，每題 5 分，共 10 分)

說明：第 1 題至第 2 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請填至答案卷之指定欄位。 各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或書寫多於一個選項者，該題以零分計算。

1.如圖，長方形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=3$，$\overline{BC}=2$，E 在 $\overline{AD}$ 上且 $\overline{AE}:\overline{ED}=2:1$，$F$ 為 $\overline{AB}$ 上一點滿足 $\angle EFC=\angle DCF$，

則 $\tan(\angle AFE)$ 為下列哪一個選項？



(1) $\dfrac{7}{13}$

(2) $\dfrac{4}{7}$

(3) $\dfrac{8}{15}$

(4) $\dfrac{9}{16}$

(5) $\dfrac{5}{9}$

2.給定空間中四點 $A(1,2,0)$、$B(2,0,1)$、$C(0,1,2)$、$D(9,5,1)$。設 ΔABC 的重心為 G 點、ΔBCD 的重心為 H 點，

則下列選項何者正確？

(1) G 點座標為 $(1,1,-1)$。

(2) 直線 $\overleftrightarrow{DG}$ 的參數式為 $\begin{cases} x=1+2t \\ y=1+t \\ z=1 \end{cases}$，$t\in\mathbb{R}$。

(3) 直線 $\overleftrightarrow{DG}$ 與直線 $\overleftrightarrow{AH}$ 沒有交點。

(4) 外積 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(1,1,1)$。

(5) 空間中滿足 $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$ 的點 P 只有一個。

二、多選題：(共三題，每題 5 分，共 15 分)

說明：第 3 題至第 5 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，選出正確選項，請填至答案卷之指定欄位。每題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；所有選項均未作答或答錯多於 2 個選項者，該題以零分計算。

3.請問下列哪些選項是正確的？

(1) 若對於實數 k，無窮級數和 $\sum_{n=1}^{\infty}k^{2n}$ 存在，則無窮級數和 $\sum_{n=1}^{\infty}k^{n}$ 亦存在。

(2) 若 $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{(x-a)^3}$ 存在，則 $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{x^3-a^3}$ 亦存在。

(3) 三次實係數多項式 $f(x)$ 可能恰有 1 個極值點。

(4) 三次實係數多項式 $f(x)$ 必有反曲點，但未必有極值點。

(5) 四次實係數多項式 $f(x)$ 必有極值點，但未必有反曲點。

4.設$\begin{cases} a_{n+1}=\alpha a_n+\beta b_n \\ b_{n+1}=\gamma a_n+\delta b_n \end{cases}$，且矩陣$A$滿足$\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix}=A\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$，$\forall n\in\mathbb{N}$。已知矩陣$A$為轉移矩陣且矩陣$A$為不可逆。

若$\begin{bmatrix} a_5 \\ b_5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix}$，試選出正確的選項。

(1) $\alpha=\delta$。

(2) $\gamma=\beta$。

(3) $\alpha+\beta=\frac{1}{3}$。

(4) $\alpha+\delta=\beta+\gamma$。

(5) $a_1+b_1=2$。

5.已知P點為ΔABC內部一點，則下列敘述何者為真？

(1) 存在正數α、β且$\alpha+\beta>1$，使得$\overrightarrow{AP}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$。

(2) 若$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}=0$且$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，則$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AB}=0$。

(3) 若$3\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$，則$3\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}$。

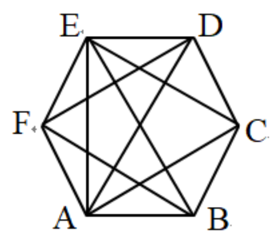
(4) 若$|\overrightarrow{PA}|=|\overrightarrow{PB}|=|\overrightarrow{PC}|$，則$\Delta ABC$為銳角三角形。

(5) M為$\overline{BC}$中點，若存在正數α，使得$\alpha\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)+\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PM}$成立，則$\triangle ABC$為正三角形。

三、填充題：(共五題，每題 5 分，共 25 分)

說明：第 **A** 題至第 **E** 題為填充題，將答案填至答案卷之指定欄位，每一題完全答對得 5 分，答錯不倒扣；未完全答對不給分。

A.現有 A、B、C、D、E、F 六戶人家的相對位置如右圖，除了 B、D 與 C、F 之間沒有道路相通外，其餘任兩戶之間均有道路相通。若某人希望從 A 出發後拜訪各戶一次後再回到 A (任兩戶間均只走連接兩戶的直線道路)，試問走法有__________種。



B.已知函數$f(x)=(5-m)x^2-6x+m-5$，當$x>0$時，$f(x)>0$恆成立，則實數m的解集合為__________。

C.平面上有一個中心為O點，F_1、F_2為兩焦點的橢圓Γ_1，且A點為其短軸上其中一個頂點。另有一個以O點為焦點，A點為頂點，且過F_1、F_2的拋物線Γ_2。已知Γ_1與Γ_2有P、Q、A三個交點，則 $\dfrac{\overline{OP}}{\overline{OA}}=$__________。

D.ΔABC中，已知M為$\overline{BC}$中點，點P、Q分別在$\overline{AB}$、$\overline{AC}$上，且$\overline{AP}=4$，$\overline{PB}=3$，$\overline{AQ}=2$，$\overline{QC}=1$，$\angle PMQ=90^\circ$。試求$\cos A$的值為__________。

E.袋中有編號 1、2、3、4、5 卡片各 3 張，小明從這 15 張卡片中隨機取 3 張，則此 3 張卡片數字總和是 5 的倍數的機率為__________。

第貳部分：非選擇題(數學寫作能力、計算證明題，共 50 分)

說明：本部份共有兩題數學寫作能力及五題計算證明題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明題號**(1、2)** 與子題號**((1)、(2)、…)**，同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分。務必使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。每題配分標於題末。

四、數學寫作能力：(共二題，共 12 分)

1.請說明何謂幾何分佈?敘述其機率質量函數，並求其期望值。(6 分)

2. (1)請敘述函數的夾擠定理(3 分)

(2)試用夾擠定理求極限$\lim\limits_{x\to 0} x^2\left[\dfrac{1}{x}\right]$。(3 分)【[ ]為高斯函數符號】

五、計算證明題：(共五題，共 38 分)

1. (1)試敘述二項式定理，即對所有正整數 n ，$(x+y)^n=$________。(2 分)

(2)試利用(1)以及 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ (1的三次方根之一)證明：若 n 是3的倍數，則：

$$C_0^n+C_3^n+C_6^n+\cdots+C_{n-3}^n+C_n^n=\begin{cases}\dfrac{1}{3}(2^n+2), \text{ 若 } n \text{ 是 3 的偶數倍}\\ \dfrac{1}{3}(2^n-2), \text{ 若 } n \text{ 是 3 的奇數倍}\end{cases} \quad (6\text{ 分})$$

2.設 S_n 為曲線 $y=x^{n+2}$ 與 $y=x^n$ （$n\in\mathbb{N}$）所圍成區域之面積，試求無窮級數和：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}S_n=$_______。(7 分)

3.試證明：任意實係數多項式函數 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ，$a\neq 0$ 之圖形均為點對稱圖形。(8 分)

4.設 $\omega=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$ ，$n\in\mathbb{N}$，試證明：

(1)當 $k\in\mathbb{N}$ 且 $k<n$ 時，$\left|1-\omega^k\right|=2\sin\dfrac{k\pi}{n}$ (4 分)

(2) $\sin\dfrac{\pi}{n}\cdot\sin\dfrac{2\pi}{n}\cdot\sin\dfrac{3\pi}{n}\cdots\cdot\sin\dfrac{(n-1)\pi}{n}=\dfrac{n}{2^{n-1}}$ 。 (5 分)

5.已知直線 $L_1:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z}{-1}$ 與直線 $L_2:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-1}{-4}=\dfrac{z-1}{1}$ 互為歪斜線，試求：

(1)包含直線 L_1 且與直線 L_2 平行的平面方程式。(3 分)

(2)直線 L_1 與直線 L_2 的最短距離。(3 分)

試題結束