103 年度全國科學班試辦聯合學科資格考數學科試題卷

※說明

一、考試時間：120 分鐘。

二、命題範圍：99 課綱 1~4 冊 B 版以及數甲 I、II 冊全部內容。

三、本份試題包含：單一選擇題（15 分），填充題（15 分），定理敘述與證明（20 分）以及計算與證明題（50 分）。

※試題

一、單一選擇題

說明：第 1 至 5 題；每題選出最適當的一個選項，標示在答案卷之「單一選擇題」答案欄上。每題答對得 3 分；答錯不倒扣。共 15 分。

1、以 y 軸為準線，通過 $A(1,2)$，$B(4,-2)$ 兩點的拋物線有幾個？

(1) 0　(2) 1　(3) 2　(4) 3　(5) 超過 3 個。

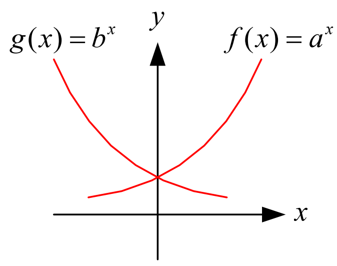
2、設集合 $I=\{1,2,3,4,5\}$，選擇 I 的兩個非空子集合 A,B，使得 B 中的最小的數大於 A 中最大的數，則有幾種不同的選擇方法？

(1) 50 種　(2) 49 種　(3) 48 種　(4) 47 種　(5) 46 種。

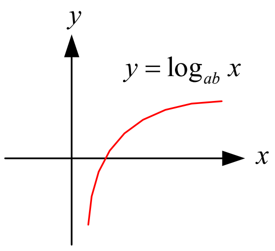
3、等比數列 $\{a_n\}$ 的一般項 $a_n=3\times 2^{n-1}$，若 $S_n=a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+\cdots+a_na_{n+1}$，則 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{4^n}$ 之值為下列何者？

(1) 6　(2) 3　(3) 2　(4) $\dfrac{1}{3}$　(5) $\dfrac{1}{6}$。

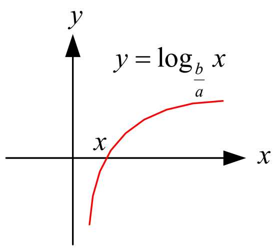
4、兩指數函數 $f(x)=a^x$ 與 $g(x)=b^x$ 的圖形相互對稱於y軸，如右圖所示，則下列哪一個選項恆正確？



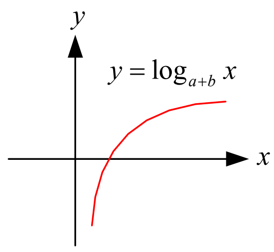
(1)



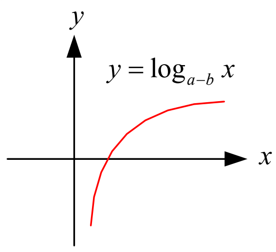
(2)



(3)



(4)



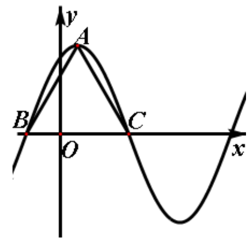
5、在坐標空間中，一正立方體的八個頂點分別為(0,0,0)、(1,0,0)、(1,1,0)、(0,1,0)、(0,0,1)、(1,0,1)、(1,1,1)與(0,1,1)。試問下列那一個平面與此正立方體的截面為五邊形？

(1) 2x＋2y＋2z＝3
(2) 2x＋2y＋2z＝5
(3) 3x＋y＋3z＝5
(4) 3x＋3y＋4z＝6
(5) 3x＋6y＋4z＝11。

二、填充題

說明：第 A 至 E 題請將答案寫在答案卷之「填充題」答案欄上，每題完全答對得 3 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。共 15 分。

A、函數 $f(x)=6\cos^2\dfrac{\omega x}{2}+\sqrt{3}\sin\omega x-3(\omega>0)$ 在一個週期內的圖形如右圖所示，A 為此週期內的最高點，B 、C 為圖形與 x 軸的交點，且 ΔABC 為正三角形，求 ω 之值為________。



B、設橢圓Γ_1：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$與雙曲線$\Gamma_2$共焦點，若直線 x－y＝0 是$\Gamma_2$的一條漸近線，且$\Gamma_1$與$\Gamma_2$有一交點為$(\sqrt{6},\sqrt{3})$，求 a^2+b^2 的值＝________。

C、設 X 代表投擲四顆骰子時，所出現的最小點數的隨機變數(如擲出了 2,2,4,5，則 $X=2$)，試求 X 的期望值 $E(X)$＝________。

D、若 $f(x)=\begin{cases} x\text{，當}0\le x\le 1 \\ 2-x\text{，當}1\le x\le 2\end{cases}$，且滿足 $f(x+2)=f(x)$，則 $f(x)$ 圖形與 $y=\dfrac{1}{8}x$ 圖形的交點有________個。

E、空間坐標系中，平面 E：$x+y+z=2$，令 L 為平面 E 與 xy 平面的交線，現在將平面 E 以 L 為軸旋轉 θ，得到新的平面 E'，已知 E' 通過點 $P(3,1,-4)$，試求平面 E' 的方程式________。

三、定理敘述與證明

說明：本大題共有 2 題，每題 10 分，共 20 分。每題配分為定理敘述佔 3 分，定理證明佔 7 分。答案請寫在答案卷之「定理敘述與證明」答案欄上，同時必須寫出演算過程或理由，否則將不予計分。務必使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。

1、試敘述並證明「三角形餘弦定理」。

2、試敘述並證明「牛頓一次因式檢驗法」。

四、計算與證明題

說明：本大題共有 5 題，共計 50 分。各題配分如題後標示。答案請寫在答案卷之「計算與證明題」答案欄上，並請標明題號與子題號。同時必須寫出演算過程或理由，否則將不予計分。<u>務必使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆</u>。

1、銀行一般常用的貸款還款方式之一：「本息平均攤還法」其計算方式為採每月複利計息一次，將貸款期間內全部貸款本金與利息平均分攤於每一期中償付，使得**每期繳納相同的金額**。例如：某甲向銀行貸款 12 萬元，年利率為 1.2%，每月複利一次，貸款期限為 3 個月，則到期後需償還的本利和為 $120000(1+0.1\%)^3$ 元，使用本息平均攤還法時，假設每月須繳款 x 元，則 $x+x(1+0.1\%)+x(1+0.1\%)^2=120000(1+0.1\%)^3$ 解得 x 的近似值為 40080，因此某甲每月須繳納的金額為 40080 元。

今假設銀行願意貸款給民眾的房貸金額（本金）是以每月房貸支出（本利和）不超過月收入的三分之一為原則，某人打算向銀行貸款買房子，他的目前月收入為 45000 元。設銀行房屋貸款的年利率為 2.4%，期限為 20 年，採「本息平均攤還法」每月複利計息一次，則此人現能向銀行貸款的最高金額為____________萬元。(7 分)

（**注意**：單位為萬元，萬元以下若超過 5000 元則以 1 萬元計；若未超過 5000 元則捨去不計）

（參考對數值：log1.002＝0.0008，log1.55＝0.1903，log1.56＝0.1931，log1.57＝0.1959）

2、設 $I=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，$J=\begin{bmatrix}3&3&3\\3&3&3\\3&3&3\end{bmatrix}$，若 $(I+J)^5=aI+bJ$，其中 a、b 是實數，求數對(a,b)。(7 分)

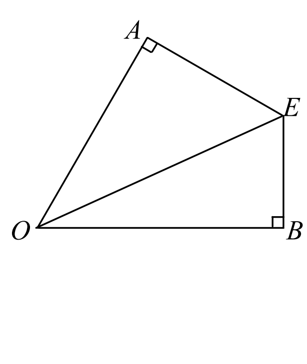
3、已知拋物線 $\Gamma: y=2-x^2$ 與直線 $L: y=-x$，

(1) 試求 Γ 與 L 的交點坐標。(2 分)

(2) 試求 Γ 與 L 所圍成的封閉區域 R 的面積。(2 分)

(3) 將區域 R <u>繞 y 軸</u>旋轉一圈，試求此旋轉體的體積。(6 分)

4、如右圖，$\angle AOB=60°$、$\overline{AE}\perp\overline{OA}$、$\overline{BE}\perp\overline{OB}$



(1) 若 $\overline{OA}=a$、$\overline{OB}=b$，$\overrightarrow{OE}=c\overrightarrow{OA}+d\overrightarrow{OB}$，以 a, b 表示 c, d 可得 $(c, d)=$？(6 分)

(2) 若 $\overline{AE}=a$、$\overline{BE}=b$，$\overrightarrow{OE}=c\overrightarrow{OA}+d\overrightarrow{OB}$，以 a, b 表示 c, d 可得 $(c, d)=$？(6 分)

5、(1) 設某個試驗成功的機率是 p（$0< p <1$），今重複操作此試驗，每次試驗不互相影響。設隨機變數 X 代表重複操作此試驗直到成功為止的操作次數，計算 $E(X)$ 的值。(6 分)

(已知：若 $-1<r<1$，則 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(nr^n\right)=0$)

(2) 今從一副 52 張牌的樸克牌中抽牌，抽完後放回再繼續抽下一張牌。設 $E(X)$ 代表使這 52 張牌每張至少被抽中一次所需的抽牌次數，證明：$E(X)=52\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{52}\right)$。(4 分)

(已知：給定隨機變數 $X_1,X_2,X_3,\cdots,X_n$，$E\left(X_1+X_2+\cdots+X_n\right)=E\left(X_1\right)+E\left(X_2\right)+\cdots+E\left(X_n\right)$)

(3) 承(2)，證明：$E(X)<312$。(4 分)

<u>試 題 結 束</u>