110 年度全國科學班聯合學科資格考 **數學科** 試題卷

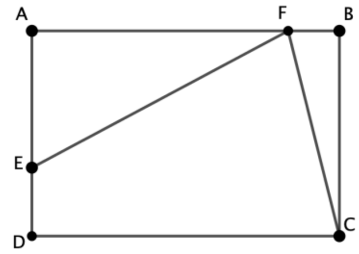
第壹部分：單選題、多選題及填充題，共 50 分。

一、單選題：(共二題，每題 5 分，共 10 分)

說明：第 1 題至第 2 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請填至答案卷之指定欄位。 各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或書寫多於一個選項者，該題以零分計算。

1.如圖，長方形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=3$，$\overline{BC}=2$，E 在 $\overline{AD}$ 上且 $\overline{AE}:\overline{ED}=2:1$，$F$ 為 $\overline{AB}$ 上一點滿足 $\angle EFC=\angle DCF$，

則 $\tan(\angle AFE)$ 為下列哪一個選項？



(1) $\frac{7}{13}$

(2) $\frac{4}{7}$

(3) $\frac{8}{15}$

(4) $\frac{9}{16}$

(5) $\frac{5}{9}$

【命題說明】--三角函數(基本題)

【參考答案】(3)

【試題解析】延長 $\overline{EF}$ 交 $\overline{CD}$ 延長線於 P 點，則 $\angle AFE=\angle EPD$。因為 $\angle EFC=\angle DCF$，所以 $\overline{PC}=\overline{PF}$。

設 $\overline{AF}=x$，由於 $\Delta AFE\sim\Delta EPD$，所以 $\overline{PD}:\overline{AF}=\overline{PE}:\overline{EF}=1:2$，故 $\overline{ED}=\frac{2}{3}$，$\overline{PD}=\frac{1}{2}x$，$\overline{PE}=\frac{1}{3}\overline{PF}=\frac{1}{3}\overline{PC}=\frac{1}{6}x+1$，

ΔPDE中，由畢氏定理，$(\frac{1}{6}x+1)^2=(\frac{x}{2})^2+(\frac{2}{3})^2$，解得 $x=\frac{5}{2}$，因此，$tan(\angle AFE)=tan(\angle EPD)=\frac{4}{3x}=\frac{8}{15}$.

2.給定空間中四點 $A(1,2,0)$、$B(2,0,1)$、$C(0,1,2)$、$D(9,5,1)$。設 ΔABC 的重心為 G 點、ΔBCD 的重心為 H 點，

則下列選項何者正確？

(1) G 點座標為 $(1,1,-1)$。

(2) 直線 $\overleftrightarrow{DG}$ 的參數式為 $\begin{cases} x=1+2t \\ y=1+t \\ z=1 \end{cases}$，$t\in\mathbb{R}$。

(3) 直線 $\overleftrightarrow{DG}$ 與直線 $\overleftrightarrow{AH}$ 沒有交點。

(4) 外積 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(1,1,1)$。

(5) 空間中滿足 $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$ 的點 P 只有一個。

【命題說明】--空間中的平面與直線(基本題)

【參考答案】(2)

【試題解析】(1) G 點座標為 $(1,1,1)$ (2) 正確 (3) 直線 $\overleftrightarrow{DG}$ 與直線 $\overleftrightarrow{AH}$ 相交於 $(3，2，1)$。

(4) 外積 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-3,-3,-3)$。(5) 空間中滿足 $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$ 的點 P 為一直線 $\begin{cases} x=1+t \\ y=1+t \\ z=1+t \end{cases}$，$t\in\mathbb{R}$。

二、多選題：(共三題，每題 5 分，共 15 分)

說明：第 3 題至第 5 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，選出正確選項，請填至答案卷之指定欄位。每題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；所有選項均未作答或答錯多於 2 個選項者，該題以零分計算。

3.請問下列哪些選項是正確的？

(1) 若對於實數 k ，無窮級數和 $\sum_{n=1}^{\infty} k^{2n}$ 存在，則無窮級數和 $\sum_{n=1}^{\infty} k^{n}$ 亦存在。

(2) 若 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{(x-a)^3}$ 存在，則 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{x^3-a^3}$ 亦存在。

(3) 三次實係數多項式 $f(x)$ 可能恰有 1 個極值點。

(4) 三次實係數多項式 $f(x)$ 必有反曲點，但未必有極值點。

(5) 四次實係數多項式 $f(x)$ 必有極值點，但未必有反曲點。

【命題說明】--極限與函數、多項式函數的微積分(基本題)

【參考答案】(1)(2)(4)(5)

【試題解析】

(1)若無窮級數和 $\sum_{n=1}^{\infty} k^{2n}$ 存在，則 $|k^2|<1$ ，因此 $|k|<1$ ，無窮級數和 $\sum_{n=1}^{\infty} k^{n}$ 亦存在。

(2)若 $a=0$ ，則兩者相同，前者存在後者就會存在；

若 $a\neq 0$ ，令 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{(x-a)^3}=L$ ， $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{x^3-a^3}=L\times\lim_{x\to a}\frac{(x-a)^2}{x^2+ax+a^2}=0$ 亦存在。

(3)三次實係數多項式 $f(x)$ 若恰有 1 個極值點，表示 $f'(x)=0$ 有重根，設 $f'(a)=0$ ，但重根表示 $f''(a)=0$ ，則該點為反曲點而非極值點，故不可能。

(4)對三次實係數多項式， $f''(x)=0$ 為一元一次方程式，必有一根，此根對應到的點即為反曲點。

另易知 $f(x)=x^3$ 無極值點。

(5)對四次實係數多項式， $x\to\infty$ 及 $x\to-\infty$ 時 $f(x)$ 同時趨近於正無限大或負無限大，如果均趨近於正無限大時， $f(x)$ 有最小值，對應到的點即為極值點，反之亦然。另易知 $f(x)=x^4$ 無反曲點。

4.設 $\begin{cases} a_{n+1}=\alpha a_n+\beta b_n \\ b_{n+1}=\gamma a_n+\delta b_n \end{cases}$ ，且矩陣 A 滿足 $\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix}=A\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$ ， $\forall n\in\mathbb{N}$ 。已知矩陣 A 為轉移矩陣且矩陣 A 為不可逆。

若 $\begin{bmatrix} a_5 \\ b_5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix}$ ，試選出正確的選項。

(1) $\alpha=\delta$ 。

(2) $\gamma=\beta$ 。

(3) $\alpha+\beta=\frac{1}{3}$ 。

(4) $\alpha+\delta=\beta+\gamma$ 。

(5) $a_1+b_1=2$ 。

【命題說明】--矩陣(基本題)

【參考答案】(4)(5)

5. 已知 P 點為 ΔABC 內部一點，則下列敘述何者為真？

(1) 存在正數 α 、β 且 $\alpha+\beta>1$，使得 $\overrightarrow{AP}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$。

(2) 若 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ 且 $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，則 $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AB}=0$。

(3) 若 $3\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$，則 $3\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}$。

(4) 若 $|\overrightarrow{PA}|=|\overrightarrow{PB}|=|\overrightarrow{PC}|$，則 ΔABC 為銳角三角形。

(5) M 為 $\overline{BC}$ 中點，若存在正數 α，使得 $\alpha(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|})+\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PM}$ 成立，則 $\triangle ABC$ 為正三角形。

【命題說明】--平面向量(進階題)

【參考答案】(2)(3)(4)

【試題解析】

(1) P 點為 $\triangle ABC$ 內部一點，則 $\overrightarrow{AP}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$，其中 α 、β 為正數且 $\alpha+\beta<1$。

(2) $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ 且 $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，表示 $\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BC}$ 且 $\overrightarrow{BP}\perp\overrightarrow{AC}$，故 P 點為 $\triangle ABC$ 的垂心，得 $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AB}=0$。

(3) $3\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$，表示 $\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，故 P 點為 $\triangle ABC$ 的重心，得 $\overrightarrow{BP}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BA}$，$3\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}$。

(4) $|\overrightarrow{PA}|=|\overrightarrow{PB}|=|\overrightarrow{PC}|$，表示 P 點為 $\triangle ABC$ 的外心，又外心在 $\triangle ABC$ 的內部可知 $\triangle ABC$ 為銳角三角形。

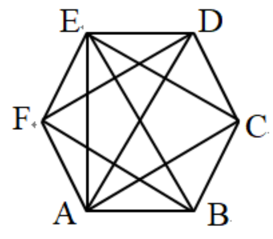
(5) 向量 $\alpha(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|})$ 平分 $\angle A$ 且 $\alpha(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|})=\overrightarrow{PM}-\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{AM}$，即 $\angle A$ 的內角平分線與 $\overline{BC}$ 上中線重合，

故 $\triangle ABC$ 為等腰三角形。

三、填充題：(共五題，每題 5 分，共 25 分)

說明：第 **A** 題至第 **E** 題為填充題，將答案填至答案卷之指定欄位，每一題完全答對得 5 分，答錯不倒扣；未完全答對不給分。

A. 現有 A、B、C、D、E、F 六戶人家的相對位置如右圖，除了 B、D 與 C、F 之間沒有道路相通外，其餘任兩戶之間均有道路相通。若某人希望從 A 出發後拜訪各戶一次後再回到 A (任兩戶間均只走連接兩戶的直線道路)，試問走法有__________種。



【命題說明】--排列組合(進階題)

【參考答案】48

【試題解析】此題可視為 B,C,D,E,F 的直線排列(排完頭尾再加進 A)，並且滿足 B,D 不相鄰且 C,F 不相鄰的排列數，可用集合

$\{B, D \text{ 不相鄰}\}-\{B, D \text{ 不相鄰且 } C, F \text{ 相鄰}\}$計算，

前者的排列數為$3!\,(C, E, F \text{ 排列數})\cdot C_2^4\,(\text{選 } B, D \text{ 位置})\cdot 2!\,(B, D \text{ 排列})=72$，

後者的排列數為$2!\,(CE \text{ 一組與 } F \text{ 的排列數})\cdot 2\,(C, E \text{ 對調})\cdot C_2^3\,(\text{選 } B, D \text{ 位置})\cdot 2!\,(B, D \text{ 排列})=24$，

共計$72-24=48$種。

B.已知函數 $f(x)=(5-m)x^2-6x+m-5$，當 $x>0$ 時，$f(x)>0$ 恆成立，則實數 m 的解集合為__________。

【命題說明】--多項式(基本題)

【參考答案】$\{\ \}$ 或 ϕ

【試題解析】(1)當 $x>0$ 時，$f(x)>0$ 恆成立，故圖形為開口向上，得 $5-m>0\Rightarrow m<5$

(2)又 $f(x)$ 為連續函數，$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=m-5\geq 0$，得 $m\geq 5$

由(1)(2)可得 m 無實數解

C.平面上有一個中心為 O 點，F_1、F_2 為兩焦點的橢圓 Γ_1，且 A 點為其短軸上其中一個頂點。另有一個以 O 點為焦點，A 點為頂點，且過 F_1、F_2 的拋物線 Γ_2。已知 Γ_1 與 Γ_2 有 P、Q、A 三個交點，則 $\dfrac{\overline{OP}}{\overline{OA}}=$__________。

【命題說明】--二次曲線(進階題)

【參考答案】$\dfrac{11}{5}$

D.ΔABC 中，已知 M 為 $\overline{BC}$ 中點，點 P、Q 分別在 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 上，且 $\overline{AP}=4$，$\overline{PB}=3$，$\overline{AQ}=2$，$\overline{QC}=1$，$\angle PMQ=90^\circ$。試求 $\cos A$ 的值為__________。

【命題說明】--三角函數(挑戰題)

【參考答案】$\frac{5}{11}$

【試題解析】考慮坐標化，設 $A(0,0)$，$B(7,0)$，$\angle BAC=\theta$，所以 $C(3cos\theta,3sin\theta)$。因為 $\overline{AQ}=\frac{2}{3}\overline{AC}$，$Q$ 坐標為 $(2cos\theta,2sin\theta)$ M 為 $\overline{BC}$ 的中點，故 M 坐標為 $\left(\frac{3cos\theta+7}{2},\frac{3sin\theta}{2}\right)$。因為 $\angle PMQ=90^\circ$，$m_{MP}\times m_{MQ}=-1$，

可得 $-1=\dfrac{\frac{1-3cos\theta}{2}}{-\frac{3sin\theta}{2}}\times\dfrac{\frac{cos\theta-7}{2}}{\frac{sin\theta}{2}}$，化簡得 $cos\theta=\frac{5}{11}$

E.袋中有編號 1、2、3、4、5 卡片各 3 張，小明從這 15 張卡片中隨機取 3 張，則此 3 張卡片數字總和是 5 的倍數的機率為__________。

【命題說明】--排列組合，機率(基本題)

【參考答案】$\boxed{\dfrac{1}{5}}$

【試題解析】

總和是 5：(3,1,1)　$C_1^3C_2^3=9$

(2,2,1)　$C_2^3C_1^3=9$

總和是 10：(5,4,1)　$\boxed{C_1^3C_1^3C_1^3=27}$

(5,3,2)　$\boxed{C_1^3C_1^3C_1^3=27}$

(4,4,2)　$C_2^3C_1^3=9$

(4,3,3)　$C_1^3C_2^3=9$

總和是 15：(5,5,5)　$C_3^3=1$　，所求機率為 $\boxed{\dfrac{91}{C_3^{15}}=\dfrac{1}{5}}$