107 學年度全國科學班試辦聯合學科資格考 數學科試題卷

範圍:99 課綱 1-4 冊 B 版和數甲 I,II 冊全

第壹部分：單選題、多選題及填充題共佔 50 分

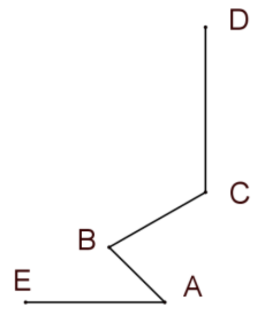
一、單選題:(共二題，每題 5 分，共計 10 分)

說明:第 1 題至第 2 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請填至答案卷之指定欄位。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或書寫多於一個選項者，該題以零分計算。

1.如右圖(圖形不一定為實際大小)，$\angle EAB=\frac{\pi}{4}$ 、$\angle ABC=\frac{5\pi}{12}$ 、$\angle BCD=\frac{2\pi}{3}$ ，

且 $\overline{AB}=2\sqrt{2}$ 、$\overline{BC}=4$ 、$\overline{CD}=6$ ，試求 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ 之值為下列哪一個選項?

(A) $48\sqrt{2}$ (B) 24 (C) $14+4\sqrt{3}+4\sqrt{2}$ (D) $24-4\sqrt{3}$ (E) 0



＜命題說明＞平面向量，基本題

＜參考答案＞(D)

＜試題解析＞$\because \overrightarrow{AB}=(-2,2)$ 、$\overrightarrow{BC}=(2\sqrt{3},2)$ 、

$\overrightarrow{CD}=(0,6)\Rightarrow \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=(-2+2\sqrt{3},10)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=(-2,2)\cdot(-2+2\sqrt{3},10)=4-4\sqrt{3}+20=24-4\sqrt{3}$

2. 設函數 $f(x)=M\sin(kx+\varphi)$ $(M\neq 0$，$k>0$，$-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2})$的圖形關於直線 $x=\frac{2\pi}{3}$ 對稱，且它的週期是 π，

則下列選項何者是正確的？

(A) $f(x)$ 的最大值是 M 。

(B) $f(x)$ 的圖形會通過點 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 。

(C) $f(x)$ 在區間 $\left[\frac{\pi}{12},\frac{2\pi}{3}\right]$ 上是遞減函數。

(D) $f(x)$ 的一個對稱中心是 $\left(\frac{5\pi}{12},0\right)$ 。

(E) 以上選項皆不是

＜命題說明＞ 三角函數(2)；中偏易

＜參考答案＞ (D)

＜試題解析＞

(A)(B)(C) M 未限定是正數或負數。

(D)因為 $x=\frac{2\pi}{3}$ 為對稱軸，週期是 π，所以 $f\left(\frac{2\pi}{3}\pm n\frac{\pi}{4}\right)=0$。

可得 $f(\frac{5\pi}{12})=0$ 成立，故選(D)

二、多選題:(共三題，每題 5 分，共計 15 分)

說明：第 3 題至第 5 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，選出正確選項，請填至答案卷之指定欄位。 每題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；所 有選項均未作答或答錯多於 2 個選項者，該題以零分計算。

3. 某班 30 位學生第二次段考數學科成績分別為 $x_1, x_2, \cdots, x_{30}$，已知 $x_1, x_2, \cdots, x_{30}$ 的算術平均數為 60 分、標準差為 10 分。若令函數 $f(x)=\sum_{k=1}^{30}(x-x_k)^2$，$f'(x)$ 是 $f(x)$ 的導函數，請問下列哪一個選項是正確的？

(A) $f(60)=3000$　(B) $\sum_{k=1}^{30} x_k{}^2 = 121000$　(C) $f(50)=6000$　(D) $f(61)>f(60)$　(E) $f'(59)>0$

＜命題說明＞統計，進階題

＜參考答案＞(A)(C)(D)

＜試題解析＞

(A) $f(60)=\ n\cdot\sigma^2=30\cdot 10^2=3000$

(B) $\frac{1}{30}\sum_{k=1}^{30} x_k{}^2 - \mu^2=\sigma^2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{30} x_k{}^2 = 30(60^2+10^2)=111000$

(C) $f(x)=\sum_{k=1}^{30}(x-x_k)^2=\sum_{k=1}^{30}(x-60+60-x_k)^2=\sum_{k=1}^{30}(x-60)^2+\sum_{k=1}^{30}(60-x_k)^2=30(x-60)^2+3000$

$f(50)=30(50-60)^2+3000=6000$

(D) $f(x)$ 在 x=60 處有最小值

(E) $f(x)$ 在 x=59 處切線斜率小於 0$\Rightarrow f'(59)<0$

4.右圖為多項式函數 $y=f(x)$在 [0,6]的圖形，且每個小格為邊長 1 的正方形，設 $g(x)=\int_0^x f(t)dt$，試問下列敘述哪些是正確的？

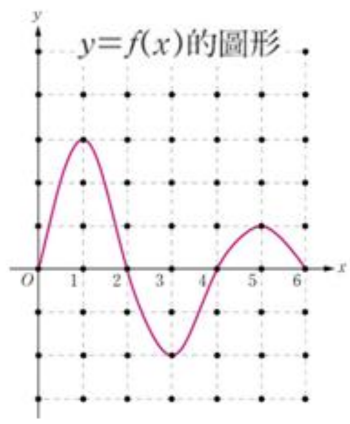
(A) 函數 $y=g(x)$在 $x=1$ 有最大值。

(B) 函數 $y=g(x)$在 $x=4$ 有極小值。

(C) 函數 $y=g(x)$的圖形在區間 (2,3) 上遞減。

(D) 函數 $y=g(x)$的圖形在區間 (2,3) 凹口向上。

(E) 函數 $y=g(x)$的圖形有三個反曲點。



＜命題說明＞多項式函數的微積分，進階題

＜參考答案＞(B)(C)(E)

＜試題解析＞

(A) $g'(1)=f(1)>0$，$g(1)$並非 $g(x)$的最大值。

(B)(C)$\because g(x)=\int_0^x f(t)dt$　$\therefore g'(x)= f($　$g'(x)= 0\Rightarrow f(x)$，得 $x=0,2,4,6$

x	0		2		4		6
$g'(x)$	0	+	0	−	0	+	0
$g(x)$	小	↗	大	↘	小	↗	大

函數 g(x)在 x＝0 與 x＝4 有極小值，$g(0)=\int_0^0 f(t)dt=0$

$g(4)=\int_0^4 f(t)dt=\int_0^2 f(t)dt+\int_2^4 f(t)dt$

$=f(x)$ 在[0,2]與 x 軸所圍面積－ $f(x)$ 在[2,4]與 x 軸所圍面積＞0

函數 g(x)在 x＝0 有最小值

函數 g(x)的圖形在區間 (2，3) 上遞減

(B)$\because g(0)=\int_0^0 f(t)dt=0$，方程式 g(x)＝0 有實根

(D)(E)又 $g''(x)=f'(x)$　$g''(x)= 0\Rightarrow f'(x)$，得 $x=1,3,5$

x		1		3		5	
$g''(x)$	+	0	−	0	+	0	−
$g(x)$	凹口向上		凹口向下		凹口向上		凹口向下

函數 g(x)的圖形在區間 (2，3) 凹口向下，函數 g(x)的圖形有三個反曲點

5. 已知複數α,β分別對應於複數平面的點P,Q，若O為原點，且$\alpha^2-2\alpha\beta+4\beta^2=0$，則下列哪些選項一定正確？

(A) $\frac{\alpha}{\beta}=1\pm\sqrt{3}i$ 。

(B) 向量$\overrightarrow{OP}$是由向量$\overrightarrow{OQ}$繞原點順、逆時針方向旋轉$60°$而得。

(C) $\overline{OP}=2\overline{OQ}$ 。

(D) ΔPOQ為一個$30°-60°-90°$的直角三角形。

(E) ΔPOQ為正三角形。

＜命題說明＞多項式函數，進階題

＜參考答案＞(A) (C)(D)

＜試題解析＞

$$\because \alpha^2-2\alpha\beta+4\beta^2=0 \Rightarrow (\frac{\alpha}{\beta})^2-2\frac{\alpha}{\beta}+4=0 \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta}=1\pm\sqrt{3}i=2(\cos\frac{\pi}{3}\pm i\sin\frac{\pi}{3})$$

即$\overrightarrow{OP}$由$\overrightarrow{OQ}$繞原點順、逆時針方向旋轉$60°$，再延伸兩倍而得，且$\overline{OP}=2\overline{OQ}$

即ΔPOQ為一個$30-60-90$的直角三角形　　　　故選(A) (C)(D)

三、填充題:(共五題，每題 5 分，共計 25 分)

說明：第 A 題至第 E 題為填充題，將答案填至答案卷之指定欄位，每一題完全答對得 5 分，答錯不倒扣；未完全答對不給分。

A.甲、乙擲一個公正骰子各一次，在甲擲出點數比乙擲出點數大的條件下，甲、乙擲出點數和是 7 點的機率為＿＿＿＿＿。

＜命題說明＞機率，基本題

＜參考答案＞$\frac{1}{5}$

＜試題解析＞

A：表示甲擲出點數比乙擲出點數大的事件、B 表示甲、乙擲出點數和是 7 點的事件

$$P(A)=\frac{5}{12}\text{ 、 }P(A\cap B)=\frac{3}{36}\Rightarrow P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{3}{36}}{\frac{5}{12}}=\frac{1}{5}$$

B. 通過(0,0)與(1,1)二點的曲線 y = f (x)稱為<u>羅倫茲曲線</u>，而且其 G 係數（Gini coefficient）定義為 $G=2\int_0^1(x-f(x))dx$，已知函數$f(x)=\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{3}x$為<u>羅倫茲曲線</u>，且其 G 係數為$\frac{1}{3}$，求數對$(a,b)$為何？

＜命題說明＞多項式函數的微積分，基本題

＜參考答案＞(2,1)

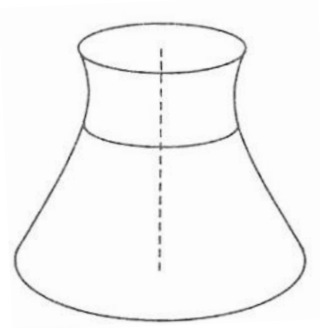
＜試題解析＞

因為$f(x)=\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{3}x$通過點(1,1)，所以$\frac{a}{3}+\frac{b}{3}=1$，即 $a+b=3$，

又因為$2\int_0^1(x-f(x))dx=2\int_0^1(x-\frac{a}{3}x^3-\frac{b}{3}x)dx=2\cdot(\frac{1}{2}x^2-\frac{a}{12}x^4-\frac{b}{6}x^2)\Big|_0^1=\frac{1}{3}$，

得 $a+2b=4$，解聯立方程式$\begin{cases}a+b=3\\a+2b=4\end{cases}$，得 $a=2$，$b=1$.

C.有一雙曲線型的花瓶，其側面是雙曲線的一部分繞其中心線旋轉所得的曲面，花瓶的最小半徑為 12 公分，上口半徑為 15 公分，下口半徑為 20 公分，高有 50 公分，如右圖，試求此雙曲線的正焦弦長為____公分。



＜命題說明＞二次曲線，基本題

＜參考答案＞ 96

＜試題解析＞由已知定旋轉軸為 x 軸可得雙曲線標準式為

$-\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{12^2}=1$，y=20 和 15 分別代入可得 x=$\frac{4b}{3}$ 和 $-\frac{3b}{4}$

而 $\frac{4b}{3}-(-\frac{3b}{4})=50$，故 b=24

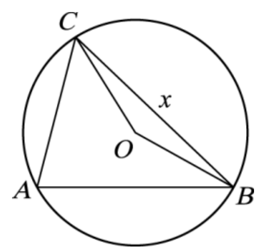
正焦弦長= $\frac{2\times 24^2}{12}$=96

D. 在銳角△ABC 中，$\overline{AB}=14$，$\overline{AC}=11$，設△ABC 的外接圓圓心為 O，半徑為 R_1，△OBC 的外接圓半徑為 R_2，若 $R_2=2R_1$，則 $R_1=$________。

＜命題說明＞ 三角函數；中

＜參考答案＞ 8

＜試題解析＞



設 $\overline{BC}=x$，在圓 O 與另一圓由正弦定理可得

$\frac{x}{\sin A}=2R_1$，$\frac{x}{\sin\angle BOC}=\frac{x}{\sin 2A}=2R_2=4R_1$

$\Rightarrow \frac{2x}{\sin A}=\frac{x}{\sin 2A}\Rightarrow 4\sin A\cos A=\sin A$

$\Rightarrow \cos A=\frac{1}{4}\Rightarrow \sin A=\frac{\sqrt{15}}{4}$

由餘弦定理可知，$x=\sqrt{11^2+14^2-2\times 11\times 14\times\frac{1}{4}}=4\sqrt{15}\Rightarrow R_1=\frac{4\sqrt{15}}{\frac{\sqrt{15}}{4}}\times\frac{1}{2}=8$

E. 設[x]表示不大於 x 的最大整數，令 $a_n=[\log n]$，n 為自然數，試求 $\sum_{n=1}^{2018}a_n$ 之值為_______。

＜命題說明＞ 級數與對數；，進階題

＜參考答案＞ 4947

＜試題解析＞

當 $1\le n\le 9$ 時，$\log n$ 的首數為 0⟹$[\log n]=0$

當 $10\le n\le 99$ 時，$\log n$ 的首數為 1⟹$[\log n]=1$

當 $100\le n\le 999$ 時，$\log n$ 的首數為 2⟹$[\log n]=2$

當 $1000\le n\le 9999$ 時，$\log n$ 的首數為 3⟹$[\log n]=3$

$\sum_{n=1}^{2010}[\log n]=[\log 1]+[\log 2]+\ldots+[\log 9]+[\log 10]+\ldots+[\log 99]+$

$[\log 100]+\ldots+[\log 999]++[\log 1000]+\ldots+[\log 2007]$

∵[log1]，[log2]，…，[log9]之值均為 0，共有 9 個

[log10]，[log11]，…，[log99]之值均為 1，共有 90 個

[log100]，[log101]，…，[log999]之值均為 2，共有 900 個

[log1000]，[log1001]，…，[log2018]之值均為 3，共有 1019 個

∴ $\sum_{n=1}^{2018}[\log n]=1\times 90+2\times 900+3\times 1019$= 90+1800+3057=4947