108 年度全國科學班聯合學科資格考試 數學科 試題

一、單一選擇題：（其中只有一個是正確或最適當的選項，答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算）

1. 空間中，設點 $A(3,3,0)$，$B(3,0,3)$，$C(0,3,3)$，$P(4,5,6)$，$Q(13,-14,15)$，$R(\log_2\frac{1}{3},\log_3 1,\log_4\frac{1}{5})$，令四面體 *P-ABC* 體積為 p，四面體 *Q-ABC* 體積為 q，四面體 *R-ABC* 體積為 r，則 p，q，r 的大小關係，請選出下列敘述正確的選項。

   (1) $p>q>r$　(2) $q>p>r$　(3) $r>q>p$　(4) $p>r>q$　(5) $r>p>q$

＜命題說明＞空間中的平面與直線，基本題
＜參考答案＞D
＜試題解析＞三個四面體的底面皆為 ΔABC，考慮 *P*、*Q*、*R* 到平面 *ABC*：$x+y+z-6=0$ 的距離，

P 到平面 *ABC* 距離 $=\frac{1}{\sqrt{3}}\times|4+5+6-6|=\frac{9}{\sqrt{3}}$，

Q 到平面 *ABC* 距離 $=\frac{1}{\sqrt{3}}\times|13-14+15-6|=\frac{8}{\sqrt{3}}$，

R 到平面 *ABC* 距離 $=\frac{1}{\sqrt{3}}\times|-\log_4 9+0-\log_4 5-6|=\frac{6+\log_4 45}{\sqrt{3}}$，其中 $2<\log_4 45<3$，

得 $p>r>q$，故選 D。

2. 已知一雙曲線 Γ_1：$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$，則下列關於此雙曲線的敘述何者正確？

   (1) 雙曲線 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=t$（$t>0$）的貫軸長為 Γ_1 貫軸長的 t 倍

   (2) Γ_1 與橢圓 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 有相同的焦點

   (3) 此雙曲線上任一點到兩漸近線的乘積為 $\frac{36}{13}$

   (4) 若 P（x，y）為 Γ_1 上的一點，F_1、F_2 為其焦點，則 $\overline{PF_1}-\overline{PF_2}=4$

   (5) 已知 Γ_2 與 Γ_1 有相同漸近線且 Γ_2 的貫軸平行 y 軸，則 Γ_2 為 Γ_1 的共軛雙曲線。

答案：(3)

詳解：(1)╳：$\frac{x^2}{4t}-\frac{y^2}{9t}=1$，貫軸長 $=2\times\sqrt{4t}=4\sqrt{t}$，又 Γ_1 之貫軸長為 4，∴為 $\sqrt{t}$ 倍。

(2)╳：Γ_1 焦點（$\sqrt{13}$，0），（$-\sqrt{13}$，0）

橢圓 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$，焦點為（0，$\sqrt{5}$），（0，$-\sqrt{5}$）。

(3)○：$\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}=\frac{2^2\times3^2}{2^2+3^2}=\frac{36}{13}$。

(4)╳：應為 $\left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right|=4$。

(5)╳：Γ_1 之共軛雙曲線為 $\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{x^2}{4}=1$

Γ_2：$\dfrac{y^2}{(3k)^2}-\dfrac{x^2}{(2k)^2}=1 \Rightarrow \Gamma_2$ 未必為 Γ_1 之共軛雙曲線。

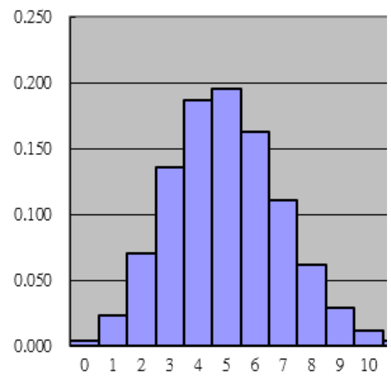
二、多重選擇題：（其中至少有一個是正確的選項，各題之選項獨立判定，所有選項均答對者得 5 分；答錯 1 個選項者得 3 分；答錯 2 個選項者得 1 分；答錯 3 個選項以上者或所有選項均未作答者得 0 分）

1. 設 $f(x)=\log_{10}\sqrt{x^2+1}$，則下列敘述何者正確？

(1) y 軸為 $y=f(x)$ 的漸近線
(2) $f(x)$ 為偶函數
(3) $y=f(x)$ 有最小值
(4) $f(\cot 50°)>0.16$
(5) $f(3)$ 是有理數

＜命題說明＞指數與對數，函數概念，中
＜參考答案＞(2)(3)(5)
＜試題解析＞(1) 圖形與 y 軸交於(0,0)
(2) $f(x)=f(-x)$
(3) $f(x)=\log_{10}\sqrt{x^2+1}\geq\log_{10}1$
(4) $f(\cot 50°)=\log_{10}\csc 50°<\log_{10}\csc 45°=\log_{10}\sqrt{2}=0.1505$
(5) $f(3)=\log_{10}\sqrt{10}=\dfrac{1}{2}$

2. 已知右圖為某一個二項分布直方圖的局部，則下列哪些選項正確？



(1)這個二項分布成功的機率為 0.5
(2)這個二項分布實驗的總次數恰為 10 次
(3)這個二項分布有可能是 $B(10,0.4)$
(4)這個二項分布成功的期望值有可能是 5
(5)這個二項分布有可能是 $B(25,0.2)$

參考答案：(4)(5)　基礎題

3. 方程式 $z^6+z^4+z^2+1=0$ 的六個複數根，在複數平面上，設第一象限的根為 z_1 並且依照逆時針方向依序將剩下五個根設為 z_2、z_3、z_4、z_5、z_6。令 $z_k=a_k+b_ki$，a_k,b_k 皆為實數，$k=1,2,\cdots,6$，且設

集合 $S=\left\{ 3a_k+b_k \mid k=1,2,3,4,5,6 \right\}$。試問下列敘述何者正確？

(1) 方程式 $z^6+z^4+z^2+1=0$ 的六個複數根都不是實數根
(2) 集合 S 中的每個元素都不是有理數。
(3) S 中最大的元素是 3
(4) 設 $i\cdot z_2=c_2+d_2 i$，其中 c_2, d_2 皆為實數，則 $3c_2+d_2$ 屬於 S
(5) 設 $i\cdot z_4=c_4+d_4 i$，其中 c_4, d_4 皆為實數，則 $3c_4+d_4$ 屬於 S。

Ans：(1)(5)

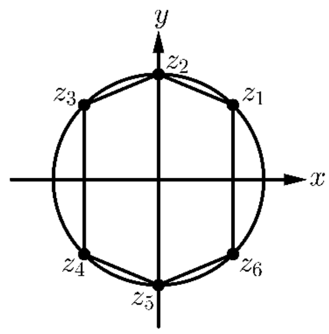
【詳解】(1) 六個根皆為虛根，正確。

(2) $3a_2+b_2=1, 3a_5+b_5=-1$ 為有理數，錯誤。

(3) 最大者為 $3a_1+b_1=2\sqrt{2}$，錯誤。

(4) $i\cdot z_2=-1 \Rightarrow 3c_2+d_2=-3\notin S$，錯誤。

(5) $i\cdot z_4=z_6$，正確。



三、填充題：(每題 5 分)

1. ΔABC 中，已知 $\overline{AB}=\overline{AC}=13$，$\overline{BC}=10$。設 P 為 ΔABC 內部一點，滿足 $\overline{PB}=8$ 且 $\overline{PC}=6$，則 ΔPAB 面積與 ΔPAC 面積的比值為_________。

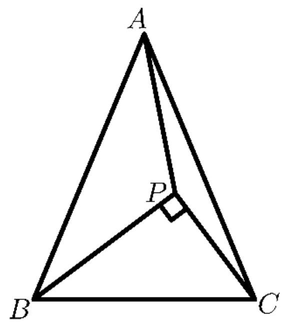
Ans：$\dfrac{11}{4}$

【詳解】設 $\angle ABC=\angle ACB=\alpha$、$\angle PBC=\beta$、$\angle PCB=\gamma$，

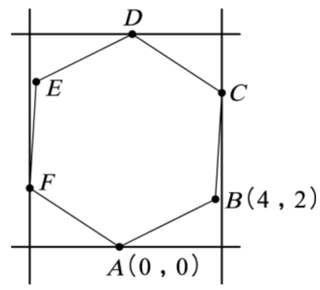
則 $\sin\alpha=\dfrac{12}{13}$，$\cos\alpha=\dfrac{5}{13}$，$\sin\beta=\cos\gamma=\dfrac{3}{5}$，$\cos\beta=\sin\gamma=\dfrac{4}{5}$。

$\sin\left(\alpha-\beta\right)=\dfrac{33}{65}$，$\sin\left(\alpha-\gamma\right)=\dfrac{16}{65}$。

所求為 $\dfrac{\frac{1}{2}\times 13\times 8\times\sin\left(\alpha-\beta\right)}{\frac{1}{2}\times 13\times 6\times\sin\left(\alpha-\gamma\right)}=\dfrac{11}{4}$。



2. 如圖，正六邊形 $ABCDEF$ 被圍在以平行 x 軸與 y 軸為邊的矩形內，其中矩形四邊各交此正六邊形於一點，則此矩形的面積為____________。



答案：16＋32$\sqrt{3}$

3. 已知方程式 $x^2-\left|2x+3\right|+4x+k=0$ 有四個相異實根，則實數 k 的範圍為 __________。

＜命題說明＞多項式方程式，進階

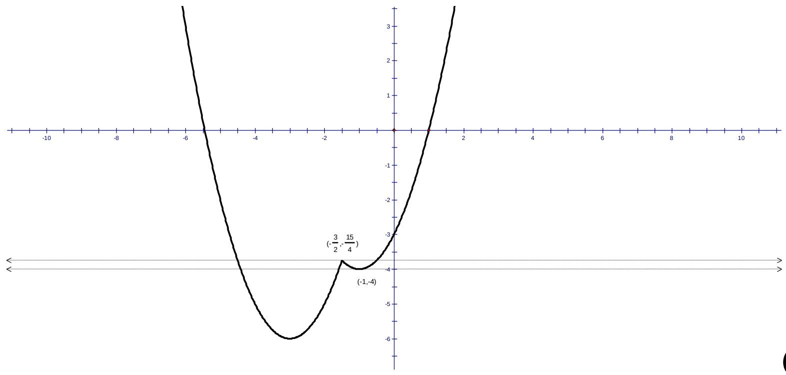
＜參考答案＞$\frac{15}{4}<k<4$

＜試題解析＞

令 $f(x)=x^2-|2x+3|+4x$，$g(x)=-k$

(1) $x\geq -\frac{3}{2}$ 時，$f(x)=x^2+2x-3$ (1 分)

(2) $x<-\frac{3}{2}$ 時，$f(x)=x^2+6x+3$ (1 分)

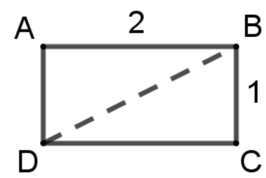


如圖， (3 分)

$-4<-k<-\frac{15}{4}$

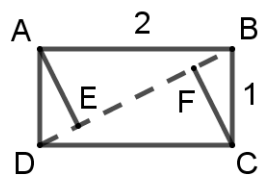
$\Rightarrow \frac{15}{4}<k<4$ (3 分)

4. 如右圖，若將邊長 $\overline{AB}=2$，$\overline{BC}=1$ 的矩形 $ABCD$ 沿 $\overline{BD}$ 折起，使得 ΔABD 與 ΔCBD 兩面的夾角為 $120°$，此時 $\overline{AC}=$____________。



＜命題說明＞空間向量，進階題

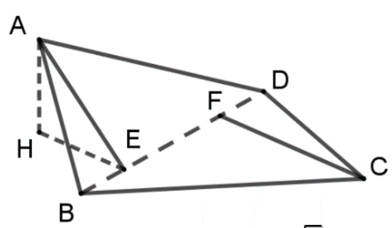
＜參考答案＞$\frac{\sqrt{105}}{5}$



＜試題解析＞令線段 AE 垂直 BD 於 E，線段 CF 垂直 BD 於 F，

其中 $\overline{AE}=\sin\angle ADB=\frac{2}{\sqrt{5}}$，$\overline{DE}=\cos\angle ADB=\frac{1}{\sqrt{5}}$，

同理 $\overline{CF}=\frac{2}{\sqrt{5}}$，$\overline{BF}=\frac{1}{\sqrt{5}}$，$\overline{EF}=\sqrt{5}-\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{3}{\sqrt{5}}$。



折起後，令平面 CBD 為 xy 平面，E 為原點，

直線 AH 垂直 xy 平面於 H，因為 $\angle AEH=60°$ 且 $\overline{AE}=\frac{2}{\sqrt{5}}$，得 $\overline{HE}=\frac{1}{\sqrt{5}}$，$\overline{AH}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$。

令射線 EF 為 x 軸正向，射線 EH 為 y 軸正向，則 $A(0,\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}})$，$C(\frac{3}{\sqrt{5}},\frac{-2}{\sqrt{5}},0)$，

線段長 $\overline{AC}=\sqrt{(\frac{3}{\sqrt{5}})^2+(\frac{-2}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{5}})^2+(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}})^2}=\sqrt{\frac{21}{5}}=\frac{\sqrt{105}}{5}$。

5. 持續投擲一公正骰子最多 5 次，若連續兩次擲出的點數相同則立即停止，或擲滿 5 次也須停止，則一連串擲骰子的所有可能結果的總數為_________。

參考答案：4686

[說明]

設總共擲骰子i次，討論如下：

(1) $i<n$的擲法

第一次擲有 6 種可能，之後的每一回都不能與上一回相同，故有 5 種可能，而最後第i回與第$i-1$回相同，只有 1 種，所以共有$6\times5^{i-2}\times1$種。

(2) $i=n$的擲法

表示到了第$n-1$回時還沒有重複的點數，而最後一回不管重複與否都要結束，故有 $6\times5^{n-2}\times6$種結果。

一共有$\sum_{i=2}^{n-1}6\times5^{i-2}\times1+6\times5^{n-2}\times6=\frac{3}{2}\left(5^n-1\right)$種。