106年度全國科學班聯合學科資格考數學科試題卷

範圍:99課綱1-4冊B版及數甲I，II冊全

第壹部分：單選題、多選題及填充題共占50分

一、單選題：（共2題，每題5分，共計10分）

說明：第 1 題至第 2 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請填至答案卷之指定欄位。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或書寫多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 變數 X 與 $Y_1 \sim Y_5$ 對應關係如下表，且 X 與 $Y_1 \sim Y_5$ 的相關係數分別為 $r_1 \sim r_5$，試問下列敘述何者錯誤？

X	1	−2	3	−4	5
Y_1	2	−4	6	−8	10
Y_2	1	−5	5	−9	9
Y_3	−2	4	−6	8	−9
Y_4	−3	6	−9	12	−14
Y_5	1	1	1	1	1

(A) $r_1 = 1$　(B) $r_1 = r_2$　(C) $r_2 > r_3$　(D) $r_3 < r_4$　(E) $r_4 < r_5$。

【基本題】答:D

〔解〕由於 $Y_1 = 2X$ 且 $Y_2 = 2X - 1$，所以 $r_1 = r_2 = 1$；

又 $\frac{Y_3}{-2}$：1, −2, 3, −4, 4.5，而 $\frac{Y_4}{-2}$：1, −2, 3, −4, $4\frac{2}{3}$，故〝X 與 Y_3〞、〝X 與 Y_4〞皆為負相關，又 $4\frac{2}{3}$ 比 4.5 更接近 5，所以 $-r_3 < -r_4 < 1 \Rightarrow -1 < r_4 < r_3 < 0$；

而 Y_5 為常數 1，所以 $r_5 = 0$。

綜合上述得 $1 = r_1 = r_2 > r_5 = 0 > r_3 > r_4$。故選(D)。

2. 已知 a、b、c、d 分別為方程式 $2^x + x = 5$、$3^x + x = 5$、$\log_2 x + x = 5$、$\log_3 x + x = 5$ 的根，則 a、b、c、d 之大小關係，下列何者正確？

(A) $a > b > c > d$

(B) $c > d > a > b$

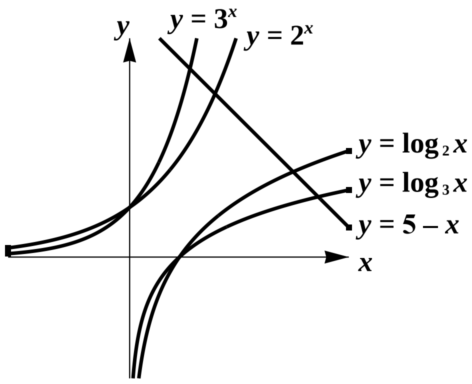
(C) $d > c > b > a$

(D) $d > c > a > b$

(E) $a > b > d > c$

【基本題】答:(D)

[解]



二、多選題：（共三題，每題5分，共計15分）

說明：第 3 題至第 5 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，選出正確選項，請填至答案卷之指定欄位。每題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；所有選項均未作答或答錯多於 2 個選項者，該題以零分計算。

3. 已知$1+3i$是實係數方程式$f(x)=x^4-3x^3+6x^2+ax+b=0$的一根，則下列敘述何者正確?

(A) $f(1-3i)=0$，

(B)多項式$f(x)$被$x^2-2x+10$整除，

(C) $f(x)=0$沒有實根，

(D) $a-b=58$，

(E) $f(3x^2)>0$的解為$-1<x<1$。

【基本題】答:AB

[解]

(A)根據虛根成對定理，$\because f(1+3i)=0$，$\therefore f(1-3i)=0$

(B)$\because (1+3i)$、$(1-3i)$為方程式之兩根，利用根與係數性質，

得此兩根所成之方程式為$x^2-2x+10=0$，$\therefore (x^2-2x+10)\,|\,f(x)$

(C)
$$\begin{array}{r|l}
 & 1\quad -1\quad\quad -6 \\ \hline
1-2+10 & 1-3+\ 6+\quad a\ +\quad b \\
 & 1-2+10 \\ \hline
 & \quad -1-4+\quad a \\
 & \quad -1+2-\ 10 \\ \hline
 & \quad\quad -6+(a+10)+b \\
 & \quad\quad \underline{-6+\quad\ 12\ \ -60} \\
 & \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 0
\end{array}$$

$\therefore \begin{cases} a+10=12 \\ b=-60 \end{cases}$，則$a=2$，$b=-60$

代回原式，$\because f(x)=(x^2-2x+10)(x^2-x-6)=(x^2-2x+10)(x-3)(x+2)$ $\therefore$有實根 3、-2

(D)由(C)，得$a-b=62$

(E) $f(3x^2)=(9x^4-6x^2+10)[3(x^2-1)](3x^2+2)$

由於$9x^4-6x^2+10$之判別式小於零，因此$9x^4-6x^2+10$恆正，

$\therefore f(3x^2)>0 \Leftrightarrow x^2-1>0 \Leftrightarrow x<-1 \vee x>1$

所以本題答案:AB

4. 下列哪些條件必使得$\triangle ABC$為鈍角三角形？＿＿＿＿＿＿。

（A） $\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C<0$

（B） $\sin^2 A>\sin^2 B+\sin^2 C$

（C） $\cos A=\dfrac{1}{2}$ 且 $\cos B=\dfrac{1}{3}$

（D） $\tan A=\dfrac{1}{2}$ 且 $\tan B=\dfrac{1}{3}$

（E） $\sin A\sin B<\cos A\cos B$

【基本題】。答:ABDE

[解]

（A） $\because \cos A\cdot\cos B\cdot\cos C<0$

$\therefore (i)\cos A,\cos B,\cos C$ 恰有一個小於 0 或 $(ii)\cos A,\cos B,\cos C$ 三個皆小於 0

$\angle A,\angle B,\angle C$ 恰有一個為鈍角或三個皆鈍角(不合)，即$\triangle ABC$必為鈍角三角形

（B） 分別由正、餘弦定理，得 $\sin^2 A>\sin^2 B+\sin^2 C\Leftrightarrow a^2>b^2+c^2\Leftrightarrow \cos A<0$，

$\therefore 90^\circ<\angle A<180^\circ$，即$\triangle ABC$必為鈍角三角形

（C） $\because \cos C=-\cos(A+B)=-[\cos A\cos B-\sin A\sin B]=-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{2\sqrt{2}}{3}>0$

$\therefore 0^\circ<\angle A,\angle B,\angle C<90^\circ$，即$\triangle ABC$必為銳角三角形

（D） $\because \tan C=-\tan(A+B)=-\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}=-1\therefore \angle C=135^\circ$

（E） $\because \sin A\sin B<\cos A\cos B\therefore \cos(A+B)>0\Leftrightarrow \cos C<0\Leftrightarrow 90^\circ<\angle C<180^\circ$

5. 設甲袋有 100 元鈔票兩張，乙袋有 50 元硬幣 3 枚。今自甲、乙兩袋隨機各取一個交換，稱為一局，則長期交換的過程中，則下列敘述哪些正確?

（A） 當甲袋總金額為 150 元時，經一局交換後使其總金額保持 150 元的機率為$\dfrac{1}{3}$

（B） 當甲袋總金額為 150 元時，經一局交換後使其總金額變為 100 元的機率為$\dfrac{1}{2}$

（C） 第三局結束時，甲袋總金額為 200 元、150 元、100 元的機率分別為$\dfrac{3}{36},\dfrac{23}{36},\dfrac{10}{36}$

（D） 第三局結束時，乙袋總金額的期望值為$\dfrac{3775}{18}$元

（E） 依此長期交換穩定後，甲袋總金額的期望值為 150 元

【基本題】答:CD

[解]

(A)(B)甲袋的轉移矩陣為 $A=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \scriptstyle 200元 & \scriptstyle 150元 & \scriptstyle 100元 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} 200元 \\ 150元 \\ 100元 \end{array}$，故(A)(B)錯誤

(C) $\because A^3\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{36}\\\frac{23}{36}\\\frac{10}{36}\end{bmatrix}$ ∴正確

(D) 第三局乙袋總金額的期望值=$350-\left(\frac{3}{36}\times200+\frac{23}{36}\times150+\frac{10}{36}\times100\right)=\frac{3775}{18}$ 元∴正確

(E) $\because \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ 且 $x+y+z=1 \therefore (x,y,z)=(\frac{1}{10},\frac{6}{10},\frac{3}{10})$

甲袋總金額的期望值=$\therefore \frac{1}{10}\times200+\frac{6}{10}\times150+\frac{3}{10}\times100=140$ 元

故正確的有CD