

# 105 年度全國科學班聯合學科資格考 數學科試題卷

範圍:99 課綱 1-4 冊 B 版及數甲 I, II 冊全

第壹部分：單選題、多選題及填充題共占 50 分

一、單選題：(共三題，每題 5 分，共計 15 分)

說明：第 1 題至第 2 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請填至答案卷之指定欄位。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或書寫多於一個選項者，該題以零分計算。

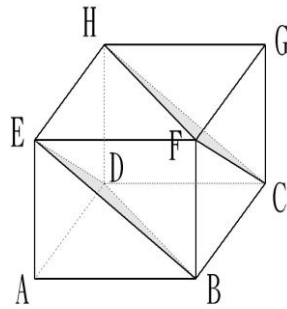
1. 在  $\triangle ABC$  中， $\angle A = 60^\circ$ ，且最大邊與最小邊長為方程式  $3x^2 - 21x + 13 = 0$  之兩根，則  $\triangle ABC$  之外接圓半徑為？

- (A)  $2\sqrt{2}$  (B)  $2\sqrt{3}$  (C) 4 (D)  $2\sqrt{5}$  (E)  $2\sqrt{6}$

Ans: (B) (基本題)

2. 已知  $ABCD-EFGH$  為正方體， $\overline{AG}$  交平面  $BDE$  與平面  $CFH$  於  $P$ 、 $Q$ ，而  $\overline{PQ}$  的長為  $\overline{AG}$  的  $k$  倍，則  $k$  的值為？

- (A)  $\frac{1}{3}$  (B)  $\frac{1}{2}$  (C)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  (D)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  (E)  $\sqrt{2}$



Ans:A

Sol: 定坐標

$D(0,0,0)$ ,  $A(1,0,0)$ ,  $B(1,1,0)$ ,  $C(0,1,0)$ ,  $E(1,0,1)$ ,  $F(1,1,1)$ ,  $G(0,1,1)$ ,  $H(0,0,1)$

$\therefore BDE$  平面:  $x - y - z = 0$        $CFH$  平面:  $x - y - z = -1$

$\overline{PQ}$  即兩平面之間的距離  $\therefore \overline{PQ} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ,  $\overline{AG} = \sqrt{3}$   $\therefore k = \frac{1}{3}$

3. 多項函數  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ,  $a > 0$ 。若  $y = f(x)$  和直線  $y = 2$  的交點有三個，三個交點的  $x$  座標分別為  $-1$ 、 $0$ 、 $1$ ，

且  $y = f(x)$  和直線  $y = 2$  所圍的區域繞直線  $y = 2$  旋轉所得的旋轉體體積為  $\frac{192}{35}\pi$ ，則下列哪一個選項是正確的？

- (A)  $a = 2$  (B)  $c = -3$  (C)  $a + b = 4$  (D)  $b + c = -5$  (E)  $2a + c = 6$

程度：1. 基本 A: (E)

二、多選題：(共三題，每題 5 分，共計 15 分)

說明：第 3 題至第 5 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，選出正確選項，請填至答案卷之指定欄位。每題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；所有選項均未作答或答錯多於 2 個選項者，該題以零分計算。

1. 設點  $P(u, v)$ 、 $Q(m, n)$  分別是圓  $x^2 + y^2 = 1$ 、 $(x-4)^2 + y^2 = 4$  上的動點，

試問下列敘述哪些是正確的？

(A)  $3m + 4n$  的最小值為 2

(B) 行列式  $\begin{vmatrix} u & v \\ m & n \end{vmatrix}$  的最大值為 6

(C) 聯立方程組  $\begin{cases} ux + vy = 3 \\ mx + ny = 4 \end{cases}$  一定有解。

(D) 設  $\vec{c} = (6, 7)$  一定可以表示成  $\vec{OP}$ 、 $\vec{OQ}$  的線性組合

(E)  $um + vn$  最小值為 0。

[答案]：(A)(B) 進階題

2.  $\triangle ABC$  中， $P$  為內部一點，且滿足  $3\overline{AB} + 5\overline{PA} + 4\overline{PC} = \vec{0}$ ，則下列哪些選項是正確的？

(A)  $P$  為  $\triangle ABC$  之重心

(B)  $\triangle BPC$  的面積： $\triangle CPA$  的面積 = 2:5

(C) 若延伸  $\overline{AP}$  交  $\overline{BC}$  於  $D$ ，則  $\overline{AD} = \frac{3}{7}\overline{AB} + \frac{4}{7}\overline{AC}$

(4D)  $\overline{BP} = \frac{4}{9}\overline{BA} + \frac{2}{9}\overline{BC}$

(E)  $\triangle ABC$  的面積 =  $\frac{9}{4}$   $\triangle APB$  的面積

Ans: CE

Sol: 【進階題】

$$3\overline{AB} + 5\overline{PA} + 4\overline{PC} = \vec{0} \Rightarrow -3\overline{PA} + 3\overline{PB} + 5\overline{PA} + 4\overline{PC} = \vec{0} \quad \therefore 2\overline{PA} + 3\overline{PB} + 4\overline{PC} = \vec{0}$$

令  $\overline{P'A'} = 2\overline{PA}$ 、 $\overline{P'B'} = 3\overline{PB}$ 、 $\overline{P'C'} = 4\overline{PC}$ ，故  $P$  為  $\triangle A'B'C'$  之重心。

(1)  $P$  為  $\triangle A'B'C'$  之重心

(2)  $\triangle ABP$ ： $\triangle BPC$ ： $\triangle CPA = 4:2:3$

(3) 若延伸  $\overline{AP}$  交  $\overline{BC}$  於  $D$   $\therefore \overline{BD}:\overline{DC} = \triangle APB:\triangle APC = 4:3$  故  $\overline{AD} = \frac{3}{7}\overline{AB} + \frac{4}{7}\overline{AC}$

(4)  $\therefore 2\overline{PA} + 3\overline{PB} + 4\overline{PC} = \vec{0} \quad \therefore 2(\overline{PB} + \overline{BA}) + 3\overline{PB} + 4(\overline{PB} + \overline{BC}) = \vec{0} \Rightarrow \overline{BP} = \frac{2}{9}\overline{BA} + \frac{4}{9}\overline{BC}$

(5) 由(2)可得知

3. 若方程組  $\begin{cases} x-y+z=a \\ 2x-3y+3z=b \\ y-z=c \end{cases}$  有解，且  $a, b, c$  為實數，則下列敘述何者正確？

(A)  $a = -2, b = 1, c = 1$  (B)  $a$  為  $b$  與  $c$  的算術平均數 (C) 此方程組有唯一解

(D) 此方程組有無限多組解 (E) 此方程組有幾組解，端視  $a, b, c$  之值而定

【答案】BD

【解析】由方程組得增廣矩陣為  $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & a \\ 2 & -3 & 3 & b \\ 0 & 1 & -1 & c \end{bmatrix}$ ，經化簡得  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3a-b \\ 0 & -1 & 1 & b-2a \\ 0 & 0 & 0 & -2a+b+c \end{bmatrix}$  且此方程組有解，

則  $-2a+b+c=0$ ，即  $a = \frac{b+c}{2}$ ，由上矩陣可知，原方程組與  $\begin{cases} x=3a-b \\ -y+z=b-2a \end{cases}$  之解相同

由兩平面之交集關係可知，此方程組有解時為無限多組解（即為空間中不平行之兩平面交集為一直線）