

數學科實驗實作試題

本試卷共有四大題，包含問答題、計算題或證明題，將依你的答題嚴謹性與完整性評分，請在答案卷上有條理的作答。無合理推論步驟的答案將無法獲得分數。

1. (a) 如下圖，某張信用卡的卡號共 16 位數，若任意相鄰三個數字的和都是 17，

則 $x = ?$ (10 分)

		8		x								5			
--	--	---	--	-----	--	--	--	--	--	--	--	---	--	--	--

- (b) 已知 $2abcde$ 是一個六位數，將此數字乘以 3 可得積為 $abcde2$ ，

則 $a + b + c + d + e = ?$ (10 分)

2. (a) 小強練習 x 、 y 兩數的四則運算，並將結果列式抄寫如下：

$$x + y = 24, x - y = 16, xy = 108, \frac{x}{y} = 3$$

已知他不小心抄錯其中一個式子，求 x 、 y 。(10 分)

- (b) 有 100 個連續正整數的和介於 8000 和 8100 之間，則此連續正整數的最小數是多少？(10 分)

- (c) $(x^{64} + 2x^2 + 5) \div (x^2 - 1)$ 的餘式為何？(10 分)

3. 證明不存在兩個自然數 m, n ，使得 $\frac{7}{17} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ 。(20 分)

4. $\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ 為一個數列，若此數列滿足對所有自然數 n ， $a_n \leq a_{n+1}$ ，我們稱此數列為遞增數列。若存在實數 M 滿足對所有自然數 n ， $a_n \leq M$ ，則此數列有上界。

定理 1: 一個有上界的遞增數列 $\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ 必存在唯一的實數 a^* ，使得此數列當 n 越來越大時， a_n 會越來越靠近 a^* ，我們稱此數列收斂到 a^* ，稱 a^* 為此數列極限值。

例如：數列 $\{0.9, 0.99, 0.999, \dots\}$ 會收斂到 1。（作答時可利用**定理 1**）

(a) 令 $a_1 = \sqrt{2}, a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}, a_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \dots, a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ ，請問此數列是否有極限值（請詳細敘述你的推論）。若有請求出數列 $\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ 的極限值。（15 分）

(b) 給定 $a_1 > b_1 > 0$ ，我們利用以下規則 $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, b_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n}$ 建構出兩個數列

$\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}, \{b_1, b_2, \dots, b_n, \dots\}$ ，請問這兩數列是否有極限值（請詳細敘述你的推論）。若有，請求出它們的極限值。（15 分）

試題結束