

數學實作測驗及觀察試題

可能會用到的對數值： $\log 2=0.3010$ ， $\log 3=0.4771$ ， $\log 7=0.8451$

□ 填充題（每題 5 分，共 100 分）

- 1 設 c 、 d 為兩正數，且 $cd = \frac{16}{3}$ ，求 $4c+3d$ 的最小值。
- 2 已知 $\log_7 a=7$ ， $\log_7 b=15$ ， $\log_7 c=14$ ，求 $\log_7 (a^2+5b+13c)$ 的值。
- 3 設多項式 $f(x)$ 除以 x^2-6x+8 ，餘式為 $x+2$ ；除以 x^2-5x+6 ，餘式為 $3x+4$ 。求多項式 $f(x)$ 除以 $x^2-7x+12$ 的餘式。
- 4 求 $(20+6\sqrt{11})^{\frac{3}{2}} + (20-6\sqrt{11})^{\frac{3}{2}}$ 的值。【化到最簡才給分】
- 5 設 a 、 b 為兩實數，且 x 的絕對值不等式 $|ax-1|>b$ 的解為 $x<-6$ 或 $x>5$ ，求數對 (a,b) 。
- 6 設 x 為實數，且 $y=(x^2+6x)^2+20(x^2+6x)+110$ 在 $x=m$ 時， y 有最小值為 n ，求數對 (m,n) 。
- 7 對任意實數 x ， $f(x)=ax^2-(2a-2)x+2a+4$ 的圖形恆在直線 $y=2x+1$ 的上方，求實數 a 的最大範圍。
- 8 試求所有滿足 $\log (x^3+3x^2-10x+16) \geq 1$ 的 x 值之範圍。
- 9 在養分充足的環境下，細菌的數量會以指數函數的方式成長。現有一種細菌其數量每經 3 小時會成長為 3 倍，若經過 n 小時後，細菌量成長為 1000 倍以上，求最小的正整數 n 。
- 10 設 x 為實數，求方程式 $2^{3x+1}-5 \cdot 2^{2x-1}-23 \cdot 2^{x-1}+3=0$ 的所有解。
- 11 設方程式 $x^4+ax^3+bx^2+cx+3=0$ 的四個整數根中恰有兩根相等，求 $a+b+c$ 的值。
- 12 設 x 為實數，求 $|x-1|+|x-2|+|x-3|+\cdots+|x-2012|+|x-2013|$ （共有 2013 個絕對值的和）的最小值。

13 設 $f(x)$ 為實係數多項式，且 $f(3+2i)=7+i$ ， $f(7-i)=3+2i$ ，其中 $i=\sqrt{-1}$ ，求 $f(f(f(f(f(3+2i))))))$ 的值。

14 設 $x=\frac{-2+xi}{1+(1+\sqrt{3})i}$ ，其中 $i=\sqrt{-1}$ ，求 x^8+x^4 的值。

15 已知 $x=\frac{(24.4)^{2.2}}{\sqrt{0.256}}$ 。若 $x=a \times 10^n$ ，其中 $1 \leq a < 10$ ， n 是整數，請利用所給的對數表，求 a 的近似值。

【以四捨五入法求到小數點後第二位】

常用對數表 $y=\log_{10} x$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133

16 已知多項式函數 $f(x)=\sqrt{7} \cdot \frac{(x-1)(x-3)}{(5-1)(5-3)} + \sqrt{7} \cdot \frac{(x-3)(x-5)}{(1-3)(1-5)} + 5 \cdot \frac{(x-5)(x-1)}{(3-1)(3-5)}$ ，若 $x=a$ 時，函數 $f(x)$ 有最大值為 M ，求數對 (a,M) 。

17 設實係數一元二次方程式 $x^2+ax+b=0$ 的二根為 $\sqrt{\sqrt{7}-4} \cdot \sqrt{-\sqrt{7}-4}$ 、 $\frac{\sqrt{-4+\sqrt{15}}}{\sqrt{-4-\sqrt{15}}}$ ，求數對 (a,b) 。

18 設 a 、 b 均為複數， $i=\sqrt{-1}$ ，且 $2a-1+i=b-(3-b)i$ ，若 a 的實部與虛部的和為 3， b 的實部與虛部的和為 8，求數對 (a,b) 。

19 已知方程式 $x \cdot |x-6|=a$ 有三個相異實根，求實數 a 的最大範圍。

20 已知方程式 $(512x^2+m_1x+1)(512x^2+m_2x+1)(512x^2+m_3x+1)(512x^2+m_4x+1)(512x^2+m_5x+1)=0$ 的十個根組成一個首項為 1 且每一項都是實數的等比數列，求 $m_1+m_2+m_3+m_4+m_5$ 的值。