

國立嘉義高中 106 學年度 學術性向資賦優異 【數理類】複選評量—數學能力評量試題

一、填充題：(每格 5 分，共 90 分。)

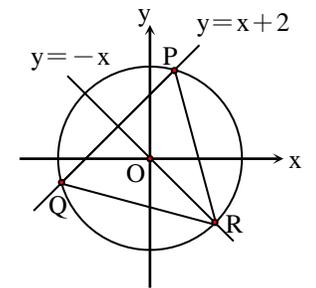
- 若 x, y, z 是從 $-1, 0, 1$ 這三個整數中取值，且滿足 $x^3 + y^3 = z^3$ ，則序組 (x, y, z) 共有 (1) 組解。
- 阿信、阿玉 兩人打算搭同一班電車上學。若此班次電車共有編號 1 到 7 號七節車廂，且阿信從任意一節車廂上車的機會相等，阿玉從任意一節車廂上車的機會相等，則阿信搭上的車廂號碼比阿玉搭上的車廂號碼大的機率是 (2)。
- 若數列 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{106}$ 每一項都是正整數，且滿足任意連續 4 項的和都是 106，則此數列 106 項總和的最小值 = (3)。
- 若 7 個數值資料 6、6、6、8、9、14、 x 的算術平均數、中位數、眾數經過適當的排序後會變成一個公差大於 0 的等差數列，則 x 的所有可能值為 (4)。【兩個解】
- 在數線上有四個點 A、B、C、D，它們所表示的數分別為 1、2、7、 x 。已知 D 點和 A、B 兩點的距離之和等於 D 點和 C 點的距離，則 x 的值為 (5)。【兩個解】
- 機器人阿發狗一開始在數線上原點的位置，在此數線上移動，按照第一次移動 1 個單位長，第二次移動 2 個單位長，第三次移動 3 個單位長，……，第 n 次移動 n 個單位長的規律運作。若它目前的位置所對應的整數是偶數，則接下來就往正向移動；若它目前的位置所對應的整數是奇數，則接下來就往負向移動。若 $P(n)$ 表示它移動 n 次後所在位置所對應的整數，則 $P(1) + P(2) + P(3) + \dots + P(107)$ 的值是 (6)。
- 已知二次函數 $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ 有最小值 -13 ，且 $f(3) = \alpha, f(5) = \beta, f(9) = \gamma, f(11) = \delta$ 。若 $f(\alpha) = f(\beta) = f(\gamma) = f(\delta)$ ，則序組 $(a, b, c) =$ (7)。

8. 已知 $2^{18} + 1 = a \times b \times c \times d$ ，其中 a, b, c, d 都是質數且 $a < b < c < d$ ，則 d 的值 = (8)。

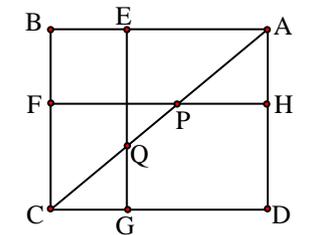
9. 設 n 是大於 2 的正整數，且方程式 $x^2 - (2n+1)x + n^2 = 0$ 的兩根為 α_n, β_n ，則 $\frac{1}{(\alpha_3-1)(\beta_3-1)} + \frac{1}{(\alpha_4-1)(\beta_4-1)} + \dots + \frac{1}{(\alpha_{20}-1)(\beta_{20}-1)}$ 的值 = (9)。

10. 已知 $\overline{AB}, \overline{CD}$ 是圓 O 中兩條互相垂直的弦，且 E 點是這兩弦的交點。若 $\overline{AE} = 35, \overline{BE} = 15, \overline{CE} = 25$ ，則圓 O 的面積 = (10)。

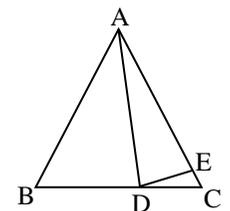
11. 如右圖所示，已知 $\triangle PQR$ 為圓 O 的內接正三角形，兩直線 $\overleftrightarrow{PQ}, \overleftrightarrow{OR}$ 的方程式分別為 $y = x + 2$ 及 $y = -x$ ，則圓 O 的面積 = (11)。



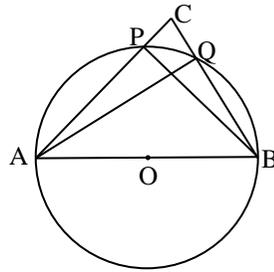
12. 如右圖所示，三個四邊形 $ABCD, ABFH, BCGE$ 都是長方形， \overline{AC} 分別交 $\overline{FH}, \overline{EG}$ 於 P, Q 兩點。已知 $\overline{BE} = \overline{BF}$ ，且 $\overline{AP} = 20, \overline{CQ} = 15$ ，則 \overline{BE} 的長度 = (12)。



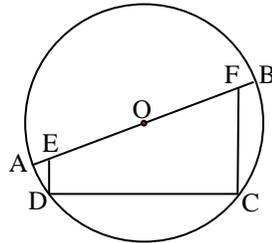
13. 如右圖所示， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ， D, E 分別在 $\overline{BC}, \overline{AC}$ 上且 $\overline{AD} = \overline{AE}$ ，若 $\angle BAD = 36^\circ$ ，求 $\angle CDE =$ (13) 度。



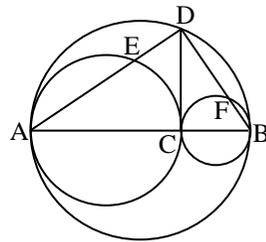
14. 如右圖所示， \overline{AB} 是圓 O 的直徑。圓 O 分別交 \overline{AC} 、 \overline{BC} 於 P 、 Q 兩點，若 $\overline{AC} : \overline{BC} = 5 : 4$ ，且 $\overline{AQ} = 3$ ，則 \overline{BP} 的長度 = (14)。



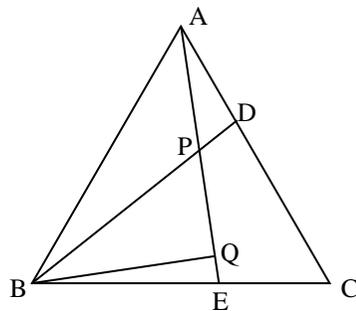
15. 如右圖所示， \overline{AB} 、 \overline{CD} 分別是圓 O 的直徑、弦。 E 、 F 在 \overline{AB} 上， $\angle EDC = \angle FCD = 90^\circ$ ，若 $\overline{AB} = 10$ 且 $\overline{CD} = 8$ ，則 $\overline{CF} + \overline{DE}$ 的長度 = (15)。



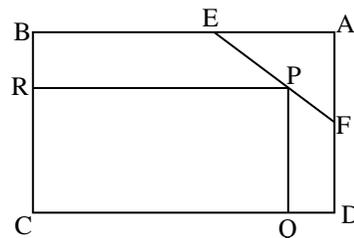
16. 如右圖所示， C 點在 \overline{AB} 上，三個圓分別以 \overline{AB} 、 \overline{AC} 、 \overline{BC} 為直徑。 D 、 E 、 F 分別在這三個圓上，且 E 、 F 分別在 \overline{AD} 、 \overline{BD} 上， $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ ，若 $\overline{AC} = 9$ 且 $\overline{BC} = 4$ ，則 $\overline{AE} + \overline{BF}$ 的長度 = (16)。



17. 如右圖所示，已知 $\triangle ABC$ 為正三角形， D 、 E 分別在 \overline{AC} 、 \overline{BC} 上， \overline{AE} 和 \overline{BD} 交於 P 點， $\overline{BQ} \perp \overline{AE}$ 於 Q 點。若 $\overline{AB} = 8$ 、 $\overline{AD} = \overline{CE} = 3$ 且 $\overline{EQ} = \frac{5}{7}$ ，則 \overline{PQ} 的長度 = (17)。【請化簡成最簡分數】



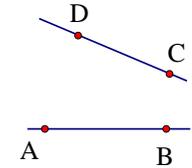
18. 如右圖所示，長方形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} = 10$ 、 $\overline{BC} = 6$ ， E 、 F 分別在 \overline{AB} 、 \overline{AD} 上， $\overline{AE} = 4$ 、 $\overline{AF} = 3$ ，且 P 點在 \overline{EF} 上使得長方形 $CQPR$ 有最大面積 m ，則 m 的值 = (18)。



二、作圖與證明：(每題 5 分，共 10 分。)

1. 本題為尺規作圖，請留下作圖過程痕跡，並寫出作圖步驟，不必證明。

【已知】如右圖，兩直線 \overleftrightarrow{AB} 、 \overleftrightarrow{CD} 不平行。
 【求作】一個通過 A 點且與兩直線 \overleftrightarrow{AB} 、 \overleftrightarrow{CD} 均相切的圓。



2. 【已知】在右圖中， B 、 C 在圓上， $\overline{AB} = \overline{BC}$ ， $\angle BAC = 30^\circ$ ， \overline{AC} 通過圓心 O 點， \overline{AD} 切圓於 D 點，連接 \overline{CD} 。
 【試證】四邊形 $ABCD$ 為菱形。

