

國立嘉義高中 106 學年度 學術性向資賦優異 【數理類】複選評量—數學能力評量試題

一、填充題：(每格 5 分，共 90 分。)

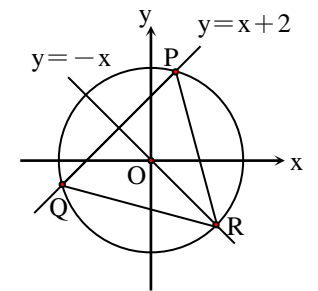
- 若  $x, y, z$  是從  $-1, 0, 1$  這三個整數中取值，且滿足  $x^3 + y^3 = z^3$ ，則序組  $(x, y, z)$  共有 (1) 組解。
- 阿信、阿玉兩人打算搭同一班電車上學。若此班次電車共有編號 1 到 7 號七節車廂，且阿信從任意一節車廂上車的機會相等，阿玉從任意一節車廂上車的機會相等，則阿信搭上的車廂號碼比阿玉搭上的車廂號碼大的機率是 (2)。
- 若數列  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{106}$  每一項都是正整數，且滿足任意連續 4 項的和都是 106，則此數列 106 項總和的最小值 = (3)。
- 若 7 個數值資料 6、6、6、8、9、14、 $x$  的算術平均數、中位數、眾數經過適當的排序後會變成一個公差大於 0 的等差數列，則  $x$  的所有可能值為 (4)。【兩個解】
- 在數線上有四個點 A、B、C、D，它們所表示的數分別為 1、2、7、 $x$ 。已知 D 點和 A、B 兩點的距離之和等於 D 點和 C 點的距離，則  $x$  的值為 (5)。【兩個解】
- 機器人阿發狗一開始在數線上原點的位置，在此數線上移動，按照第一次移動 1 個單位長，第二次移動 2 個單位長，第三次移動 3 個單位長，……，第  $n$  次移動  $n$  個單位長的規律運作。若它目前的位置所對應的整數是偶數，則接下來就往正向移動；若它目前的位置所對應的整數是奇數，則接下來就往負向移動。若  $P(n)$  表示它移動  $n$  次後所在位置所對應的整數，則  $P(1) + P(2) + P(3) + \dots + P(107)$  的值是 (6)。
- 已知二次函數  $y = f(x) = ax^2 + bx + c$  有最小值  $-13$ ，且  $f(3) = \alpha, f(5) = \beta, f(9) = \gamma, f(11) = \delta$ 。若  $f(\alpha) = f(\beta) = f(\gamma) = f(\delta)$ ，則序組  $(a, b, c) =$  (7)。

8. 已知  $2^{18} + 1 = a \times b \times c \times d$ ，其中  $a, b, c, d$  都是質數且  $a < b < c < d$ ，則  $d$  的值 = (8)。

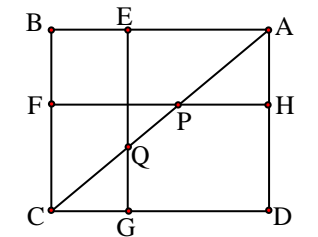
9. 設  $n$  是大於 2 的正整數，且方程式  $x^2 - (2n+1)x + n^2 = 0$  的兩根為  $\alpha_n, \beta_n$ ，則  $\frac{1}{(\alpha_3-1)(\beta_3-1)} + \frac{1}{(\alpha_4-1)(\beta_4-1)} + \dots + \frac{1}{(\alpha_{20}-1)(\beta_{20}-1)}$  的值 = (9)。

10. 已知  $\overline{AB}, \overline{CD}$  是圓  $O$  中兩條互相垂直的弦，且  $E$  點是這兩弦的交點。若  $\overline{AE} = 35, \overline{BE} = 15, \overline{CE} = 25$ ，則圓  $O$  的面積 = (10)。

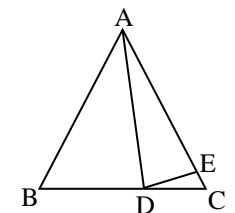
11. 如右圖所示，已知  $\triangle PQR$  為圓  $O$  的內接正三角形，兩直線  $\overleftrightarrow{PQ}, \overleftrightarrow{OR}$  的方程式分別為  $y = x + 2$  及  $y = -x$ ，則圓  $O$  的面積 = (11)。



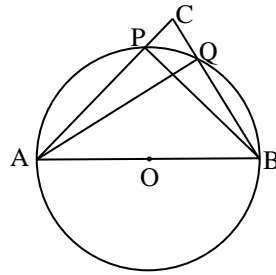
12. 如右圖所示，三個四邊形  $ABCD, ABFH, BCGE$  都是長方形， $\overline{AC}$  分別交  $\overline{FH}, \overline{EG}$  於  $P, Q$  兩點。已知  $\overline{BE} = \overline{BF}$ ，且  $\overline{AP} = 20, \overline{CQ} = 15$ ，則  $\overline{BE}$  的長度 = (12)。



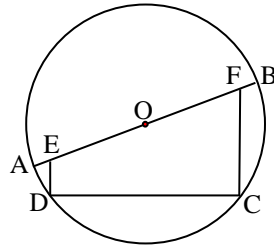
13. 如右圖所示， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ， $D, E$  分別在  $\overline{BC}, \overline{AC}$  上且  $\overline{AD} = \overline{AE}$ ，若  $\angle BAD = 36^\circ$ ，求  $\angle CDE =$  (13) 度。



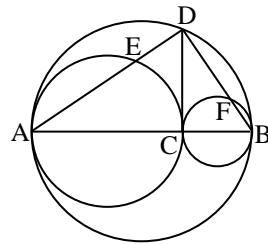
14. 如右圖所示， $\overline{AB}$  是圓  $O$  的直徑。圓  $O$  分別交  $\overline{AC}$ 、 $\overline{BC}$  於  $P$ 、 $Q$  兩點，若  $\overline{AC} : \overline{BC} = 5 : 4$ ，且  $\overline{AQ} = 3$ ，則  $\overline{BP}$  的長度 = (14)。



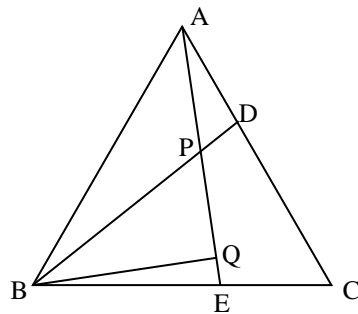
15. 如右圖所示， $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$  分別是圓  $O$  的直徑、弦。  $E$ 、 $F$  在  $\overline{AB}$  上， $\angle EDC = \angle FCD = 90^\circ$ ，若  $\overline{AB} = 10$  且  $\overline{CD} = 8$ ，則  $\overline{CF} + \overline{DE}$  的長度 = (15)。



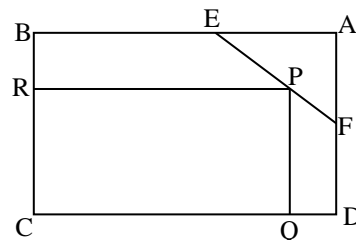
16. 如右圖所示， $C$  點在  $\overline{AB}$  上，三個圓分別以  $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BC}$  為直徑。  $D$ 、 $E$ 、 $F$  分別在這三個圓上，且  $E$ 、 $F$  分別在  $\overline{AD}$ 、 $\overline{BD}$  上， $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ ，若  $\overline{AC} = 9$  且  $\overline{BC} = 4$ ，則  $\overline{AE} + \overline{BF}$  的長度 = (16)。



17. 如右圖所示，已知  $\triangle ABC$  為正三角形， $D$ 、 $E$  分別在  $\overline{AC}$ 、 $\overline{BC}$  上， $\overline{AE}$  和  $\overline{BD}$  交於  $P$  點， $\overline{BQ} \perp \overline{AE}$  於  $Q$  點。若  $\overline{AB} = 8$ 、 $\overline{AD} = \overline{CE} = 3$  且  $\overline{EQ} = \frac{5}{7}$ ，則  $\overline{PQ}$  的長度 = (17)。【請化簡成最簡分數】



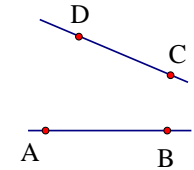
18. 如右圖所示，長方形  $ABCD$  中， $\overline{AB} = 10$ 、 $\overline{BC} = 6$ ， $E$ 、 $F$  分別在  $\overline{AB}$ 、 $\overline{AD}$  上， $\overline{AE} = 4$ 、 $\overline{AF} = 3$ ，且  $P$  點在  $\overline{EF}$  上使得長方形  $CQPR$  有最大面積  $m$ ，則  $m$  的值 = (18)。



二、作圖與證明：(每題 5 分，共 10 分。)

1. 本題為尺規作圖，請留下作圖過程痕跡，並寫出作圖步驟，不必證明。

【已知】如右圖，兩直線  $\overleftrightarrow{AB}$ 、 $\overleftrightarrow{CD}$  不平行。  
 【求作】一個通過  $A$  點且與兩直線  $\overleftrightarrow{AB}$ 、 $\overleftrightarrow{CD}$  均相切的圓。



2. 【已知】在右圖中， $B$ 、 $C$  在圓上， $\overline{AB} = \overline{BC}$ ， $\angle BAC = 30^\circ$ ， $\overline{AC}$  通過圓心  $O$  點， $\overline{AD}$  切圓於  $D$  點，連接  $\overline{CD}$ 。  
 【試證】四邊形  $ABCD$  為菱形。

