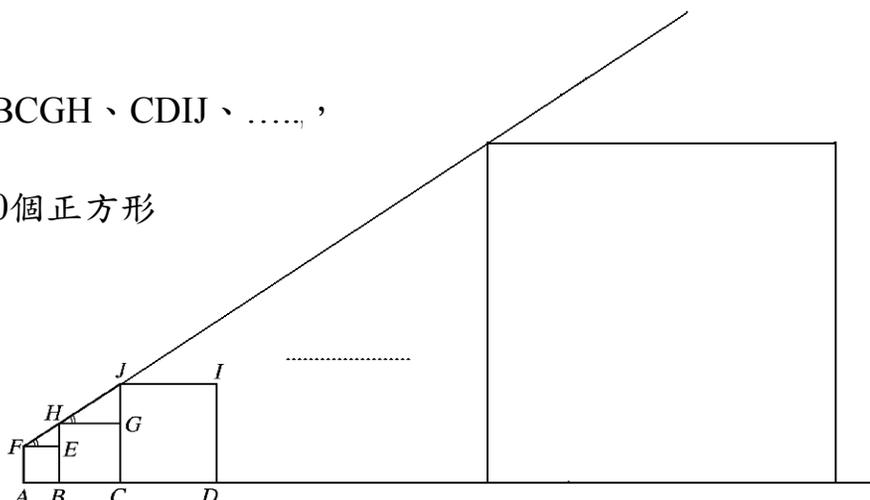


一、填充題:(每題 5 分)

1.如右圖，沿射線FH做相鄰的正方形ABEF、BCGH、CDIJ、.....，

共10個正方形，若 $\overline{AB}=2$ ， $\overline{CD}=6$ ，則此10個正方形

的面積和為_____。



2.設 $x=1+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}$ ，

求 $x^3-3x^2-6x+5=$ _____。

3.使不等式 $\frac{8}{15} < \frac{n}{n+k} < \frac{7}{13}$ 對唯一的一個整數 k 成立的最大正整數 n 為_____。

4.若方程式 $x^{1+\log x}=1000$ 的兩根為 α 、 β ，求 $\log_{\alpha} \beta + \log_{\beta} \alpha =$ _____。

5.已知 4 次方程式 $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ 的四根中兩根的和為 $1-2i$ ，另兩根的積為 $1-5i$ ，求

$7^4-ax7^3+bx7^2-cx7+d=$ _____。

6.設 p 為小於 300 的三位正整數，若 p 可以整除七位數 abcdefg，且 p 可以整除三位數 abc 與四位數 defg

的和，p 與三位數 abc 互質，則 p 為_____。

7.將拋物線 $y=-x^2$ 水平移動 a 單位，鉛直移動 b 單位後與拋物線 $y=x^2-x-2$ 的兩個交點恰關於原點

對稱，求數對(a,b)=_____。

8.多項式 $f(x)=x^{2012}+3x^{94}-5x^{18}+7$ 除以 x^4+x^2+1 的餘式為_____。

9.方程式 $2x^4-x^3+6x^2-x+6=0$ 的四個複數根為_____。

10.點 P(a,b)在第一象限內，過點 P 作一直線 L，分別交 x、y 軸的正向於 A、B 兩點。那麼 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2$

取最小值時，直線 L 的斜率為_____。

11. 已知 α, β, γ 三數滿足 $\alpha^3 + 3\alpha^2 - 4\alpha = 0$, $\beta^3 - 3\beta^2 - 4\beta = -12$, $\gamma^3 + 6\gamma^2 + 5\gamma = 0$, 求 $\alpha + \beta + \gamma$ = _____。

12. 已知函數 $f(x) = \log_a \left(ax^2 - x + \frac{1}{2} \right)$ 在 $1 \leq x \leq 2$ 上恒正, 則實數 a 值的最大範圍為 _____。

13. 設 n 為自然數, 若 $f(x) = (x+1)(2x+1)(3x+1)\dots(nx+1)$ 展開式中 x 項的係數為 a_n ,

$$\text{求 } \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1 + a_2} + \frac{1}{a_1 + a_2 + a_3} + \dots + \frac{1}{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{20}} = \text{_____} \text{。 (以最簡分數表示)}$$

14. 已知函數 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的定義域均為非負實數集, 對任意 $x \geq 0$, 規定 $f(x) * g(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ 。若

$$f(x) = x - 1, g(x) = \frac{4}{x + 2}, \text{ 則 } f(x) * g(x) \text{ 的最小值為 } \text{_____} \text{。}$$

15. 設 $[x]$ 表不大於 x 的最大整數, 例如: $[3.2] = 3$, $[-3] = -3$, 求方程式 $\frac{1}{2}[x^2 - x] = 5x + 7$ 的解為 _____。

二、計算證明題:(共 25 分)

1. 直角 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 若 M 為 \overline{BC} 的中點而且 M 到斜邊 AB 的距離為 d , 證明 $d \leq \frac{1}{3}\overline{AM}$,

並說明等號成立情形(8 分)

2. 設 a, b, c, d 為相異整數 $f(x)$ 為整係數多項式且 $f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = 5$, 證明沒有整數 k 使 $f(k) = 18$ 。

(8 分)

3. 設 $\langle a_n \rangle$ 為等差數列且首項 $a_1 > 1$, 公差 $d > 0$, 則數列 $\langle \log_{a_n} a_{n+1} \rangle$ 是遞增或遞減數列? 並證明你的結論。(9

分)