

國立嘉義高中 100 學年度高瞻計畫班複選測驗—數學科試題

一、填充題 (每題 5 分，共 75 分)

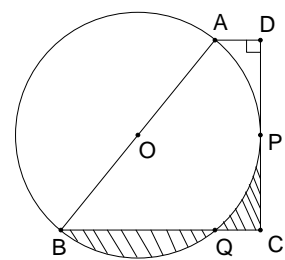
1. 設 $a = \sqrt{43 - 6\sqrt{28}}$ ，且 b 為 a 的純小數部分，則 $\frac{a}{2} + \frac{1}{b} =$ _____
2. 解不等式 $3|x+1| - |2x-3| > x+2$ ，得 x 的範圍為 _____
3. 已知 $a、b$ 為相異實數，且滿足 $\frac{a}{b} + \frac{a+10b}{b+10a} = 2$ ，則 $\frac{a}{b} =$ _____
4. 設 $f(x) = 8x^3 - 28x^2 + 56x - 45$ ，求 $f(1.499)$ 的近似值為 _____ (取至小數點後第三位，第四位四捨五入)
5. 設三次多項式 $f(x)$ 滿足 $f(\frac{1}{2}) = f(-\frac{1}{2}) = 0$ ， $f(1) = -3$ ， $f(-1) = -9$ ，求 $f(4) =$ _____
6. 設 $f(x) = x^3 - 3x^2 + mx + n$ ， $g(x) = x^3 + (m-2)x^2 - (n+3)x + 8$ ，若 $f(x) = 0$ 之三根成等差，且 $g(x) = 0$ 之三根成等比，求數對 $(m, n) =$ _____
7. 若同時滿足不等式 $3x^2 - 5x - 2 > 0$ 與 $6x^2 + (2a+9)x + 3a < 0$ 之整數解僅有 -1 ，求實數 a 的範圍為 _____
8. 在邊長 1 的正方形 ABCD 的三邊 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CD} 上各取一點 P 、 Q 、 R ，使得 $2\overline{AP} = 2\overline{BQ} = \overline{CR}$ ，求 ΔPQR 面積的最小值為 _____
9. 對任何實數 x ， $\log_{0.25} \frac{3x^2 + kx + 2}{x^2 + x + 1} > \log_{0.5} 2$ 恆成立，則實數 k 的範圍為 _____
10. 化簡 $(\log_4 \sqrt{7} + \log_{16} 343) \cdot (\log_3 4 - \log_9 2) \cdot (\log_7 27 - 2\log_{49} 3) =$ _____

11. 設 a 、 b 皆為正整數， a^{20} 為 46 位數， $(\frac{1}{b})^{10}$ 為純小數，且小數點後第 35 位始出現不為 0 的數字，則 $(ab)^5$ 的位數為_____位數

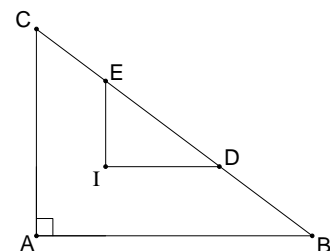
12. 設函數 $f(x) = 2(\log_2 2x)^2 + \log_2(2x)^2 + 2\log_2 x + 2$ ，其中 $\frac{1}{32} \leq x \leq 16$ ，若 $f(x)$ 的最大值為 M ，最小值為 N ，則數對 $(M, N) =$ _____

13. 試求滿足方程式 $(\log_3 y)^2 + (2^{x+1} + 2^{-x+1})\log_3 y + (2^{2x+1} + 2^{-2x+1}) = 0$ 之 y 值為_____

14. 右圖 ABCD 為梯形， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ， $\angle D = 90^\circ$ ，以 \overline{AB} 為直徑畫圓，切 \overline{CD} 於 P 點，交 \overline{BC} 於 Q 點，若 $\overline{AD} = 1$ ， $\overline{AB} = 4$ ，求斜線區域面積為_____



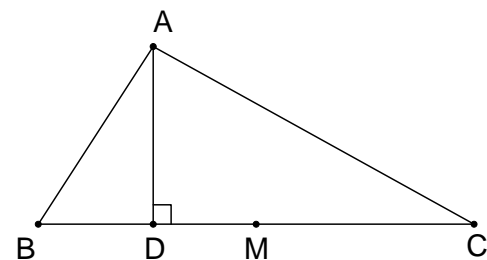
15. 如右圖， $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ， $\overline{AB} = 8$ ， $\overline{AC} = 6$ ， I 為內心， $\overline{ID} \parallel \overline{AB}$ ， $\overline{IE} \parallel \overline{AC}$ ，求 $\triangle DEI$ 的面積為_____



二、計算證明題 (3 題，共 25 分)

1. 設 $f(x)$ 是一個實係數多項式且滿足 $f(2+i) = 4i + 5$ ，又 $f(1) = -11$ ，
 (1) 若 $f(x) = (x^2 - 4x + 5) \cdot q(x) + ax + b$ ， $q(x)$ 是實係數多項式，求實數 a 、 b 之值 (佔 3 分)
 (2) 求 $f(x)$ 被 $(x-1)(x^2 - 4x + 5)$ 所除的餘式為何？ (佔 4 分)

2. 已知： $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 2\angle C$ ， M 是 \overline{BC} 中點， $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ 於 D 點
 求證： $\overline{DM} = \frac{1}{2}\overline{AB}$ (佔 8 分)



3. 某甲至銀行存款，年利率 6% 以複利計算；決定從今年年初開始，以 18 萬元作為本金，預計存 $3n$ 年，但到第 n 年年末時急需用錢而提出了 6 萬元，剩餘的錢繼續存入後面 $2n$ 年，如果要求在第 $3n$ 年年末時，剩餘的本利和達到 32 萬元，則 $3n$ 的最小整數為何？
 ($\log 2 = 0.3010$ ， $\log 3 = 0.4771$ ， $\log 1.06 = 0.0253$ ， n 為整數) (佔 10 分)