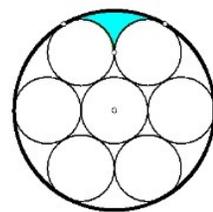


國立嘉義高中 111 學年度學術性向資賦優異【數理類】複選評量—數學能力評量試題

填充題：每題 5 分，共 20 題，共 100 分。

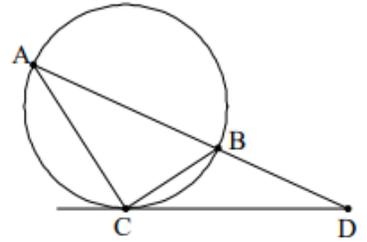
1. 已知 $2a^2 + b^2 - 4a - 6b = -11$ ，求 $a^b \times b^a =$ _____。
2. 設 $f(x) = 2x^5 - 11x^4 + 8x^3 + 9x^2 + ax + b$ ，其中 a, b 為整數，已知 $f(3 - \sqrt{2}) = 0$ ，求數對 $(a, b) =$ _____。
3. 設 x 是正整數，且 $\frac{4x+17}{3x-1}$ 為正整數，則 x 的最大值為_____。
4. 若 $|2x^2 - 12x| + 4 - k = 0$ 至少有三個實根，試求實數 k 的範圍為_____。
5. 將 $x^5 + x^4 + 1$ 因式分解成整係數多項式乘積：_____ (若不能分解請作答“不能分解”)。
6. 求 $4x^2 - 4xy + 3y^2 - 8x + 8y = 35$ 的所有正整數解 $(x, y) =$ _____。
7. 若相異實數 a, b 滿足 $a^2 - 5a + 1 = 0$ ， $b^2 - 5b + 1 = 0$ ，試求 $\frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} =$ _____。
8. 如圖，半徑為 6 的大圓內部正好放置七個大小都相等的小圓，彼此相切，則陰影部份的面積為_____。
9. 假設 $8^{2022} = x^y$ ，其中 x, y 皆為正整數，則 x 所有的值可能為_____個。



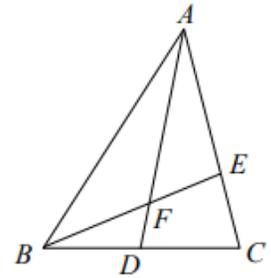
10. 求 $(1+x)(1+3x^2)(1+5x^3)(1+7x^4)(1+9x^5)(1+11x^6)(1+13x^7)(1+15x^8)$ 展開式中 x^8 項的係數為_____。
11. 已知正整數 n 可以表示成任意二個連續正整數之和，也可以表示成任意五個連續正整數之和，試問 1~2022 滿足此條件的 n 值共有_____個。
12. 有若干個正整數的算術平均數為 15，今加入兩個相同的正整數 n 後，其算術平均數變為 20，試問 n 的最小值為_____。
13. 設 $a = \frac{1}{1} + \frac{2^2}{3} + \frac{3^2}{5} + \dots + \frac{1011^2}{2021}$ ， $b = \frac{1^2}{3} + \frac{2^2}{5} + \frac{3^2}{7} + \dots + \frac{1011^2}{2023}$ ，已知 $n < a - b < n + 1$ ，其中 n 為整數， $n =$ _____。
14. 阿義跟著太太帶著寵物小黑去散步，但他們兩位都想自己牽著小黑，最後決定在可憐的小黑脖子上繫上兩條 2 公尺長的牽繩，兩人各拉著繩子的一邊，假設散步的過程中阿義和太太彼此距離恆為 2 公尺，則每一瞬間小黑能活動的範圍為_____平方公尺。
15. 設 S_n 為等差數列前 n 項之和($n > 8$)，若 $S_8 = 48$ ， $S_n = 220$ ， $S_{n-8} = 92$ ，求 $n =$ _____。
16. 三兄弟在某一次選舉前討論彼此的想法：
 大哥：如果二弟支持一號，我就支持二號；如果二弟支持三號，我就支持一號。另一方面，如果三弟支持二號，我就支持三號。
 二弟：如果大哥支持三號，我就不支持二號；如果三弟支持一號，我就支持二號。
 三弟：如果大哥支持二號，我就支持二號。
 選舉完發現他們皆支持不同的候選人，請問他們各支持幾號？_____。

17. 某一日，嘉義高中校長前往學校的途中發現一群學生正在路邊撿菸蒂，校長內心感動不已，想要給這群學生獎勵，於是他登記了 98 位學生的學號姓名。後來得知這 98 位學生至多被記到嘉獎、小功、大功其中一種獎勵，又被記嘉獎的人數等於被記小功人數的 2 倍加上被記大功人數的 $\frac{4}{3}$ 倍；被記小功的人數減 4 等於被記大功人數的 2 倍，試問被記大功的人數最多為_____人。

18. 右圖中， A 、 B 、 C 是圓上三點，已知 $\overline{AB} = 13$, $\overline{BC} = 5$, $\overline{AC} = 12$ 。以 C 為切點作圓的切線，並與直線 \overline{AB} 交於 D 點，則 $\overline{BD} =$ _____。



19. 如圖， $\triangle ABC$ 面積為 56 平方單位，點 D 為 \overline{BC} 的中點，點 E 在 \overline{AC} 上且 $\overline{AE} : \overline{EC} = 3 : 1$ ，設 \overline{AD} 與 \overline{BE} 交於點 F ，則四邊形 $CDFE$ 的面積為_____平方單位。



20. 設 $\angle C = 90^\circ$ ， \overline{AC} 平分 $\angle BAD$ 且交 \overline{BD} 於 E ， $\overline{AC} = 20$ ， $3\overline{AB} = 5\overline{AD}$ ，試求 $\overline{AE} - \overline{CE} =$ _____。

